Ion TUDOR

matematică

algebră, geometrie

• Modalități de lucru diferențiate
• Pregătire suplimentară prin planuri individualizate

Caiet de lucru

Partea a II-a

8

Ediția a IX-a

Editura Paralela 45

EDITURA PARALELA 45

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 6250/21.12.2020.
Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa școlară în vigoare pentru clasa a VIII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Referință științifică: Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Director de producție editorială: Ionuț Burcioiu

Redactare: Andreea Roșca
Tehnoredactare: Adriana Vlădescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
TUDOR, ION
Matematică : clasa 8 : algebră, geometrie : modalități de lucru diferențiate, pregătire suplimentară prin planuri individualizate : caiet de lucru / Ion Tudor. – Ed. a 9-a. – Pitești : Paralela 45, 2025 – 2 vol.
ISBN 978-973-47-4302-5
Partea 2. – Ed. rev. – 2025. – ISBN 978-973-47-4376-6
51

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești, jud. Argeș, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: **comenzi@edituraparalela45.ro**
sau accesați **www.edituraparalela45.ro**

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*
E-mail: tipografie@edituraparalela45.ro

Copyright © Editura Paralela 45, 2025
Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate, iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.
www.edituraparalela45.ro

EDITURA PARALELA 45

ALGEBRĂ

Capitolul II

CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$

Lecția 1. Adunarea şi scăderea fracțiilor algebrice

Citesc și rețin

Adunarea și **scăderea** fracțiilor algebrice se efectuează la fel ca adunarea și scăderea fracțiilor ordinare.

1. $\dfrac{A(x)}{B(x)} \pm \dfrac{C(x)}{B(x)} = \dfrac{A(x) \pm C(x)}{B(x)}$, $B(x) \neq 0.$

2. $\dfrac{A(x)}{B(x)} \pm \dfrac{C(x)}{D(x)}$, $B(x) \neq 0,\ D(x) \neq 0,$ se efectuează astfel:

– se aduc la același numitor comun fracțiile algebrice $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ și $\dfrac{C(x)}{D(x)}$;

– cu fracțiile aduse la același numitor comun se efectuează adunarea (scăderea) ca la punctul 1.

Observație: Proprietățile adunării fracțiilor ordinare se transferă și la adunarea fracțiilor algebrice.

Cum se aplică?

1. Calculați:

a) $\dfrac{x-1}{4x} + \dfrac{3x-5}{4x}$;

b) $\dfrac{3x^2+1}{6x^2} - \dfrac{x+2}{2x}$.

Soluție:

a) $\dfrac{x-1}{4x} + \dfrac{3x-5}{4x} = \dfrac{x-1+3x-5}{4x} = \dfrac{4x-6}{4x} = \dfrac{2(2x-3)}{4x} = \dfrac{2x-3}{2x}$;

b) $\dfrac{3x^2+1}{6x^2} - {}^{3x)}\dfrac{x+2}{2x} = \dfrac{3x^2+1}{6x^2} - \dfrac{3x(x+2)}{6x^2} = \dfrac{3x^2+1}{6x^2} - \dfrac{3x^2+6x}{6x^2} = \dfrac{3x^2+1-(3x^2+6x)}{6x^2} =$

$= \dfrac{3x^2+1-3x^2-6x}{6x^2} = \dfrac{1-6x}{6x^2}$.

EDITURA PARALELA 45

2. Calculați: $\dfrac{4x^2-1}{4x^2-6x}-\dfrac{6x-1}{6x-9}$.

Soluție:

$$\frac{4x^2-1}{4x^2-6x}-\frac{6x-1}{6x-9} = {}^{3)}\frac{4x^2-1}{2x(2x-3)} - {}^{2x)}\frac{6x-1}{3(2x-3)} = \frac{3(4x^2-1)-2x(6x-1)}{6x(2x-3)} =$$

$$= \frac{12x^2-3-12x^2+2x}{6x(2x-3)} = \frac{\cancel{2x-3}}{6x\,\cancel{(2x-3)}} = \frac{1}{6x}.$$

3. Aduceți la forma cea mai simplă expresia $E(x) = \dfrac{7x+3}{x^2-1}-\dfrac{x-1}{x^2+x}-\dfrac{1}{x-x^2}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

Soluție:

$$E(x) = {}^{x)}\frac{7x+3}{(x-1)(x+1)} - {}^{x-1)}\frac{x-1}{x(x+1)} + {}^{x+1)}\frac{1}{x(x-1)} = \frac{x(7x+3)-(x-1)^2+x+1}{x(x-1)(x+1)} =$$

$$= \frac{7x^2+3x-x^2+2x-1+x+1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{6x^2+6x}{x(x-1)(x+1)} = \frac{6\cancel{x}\,\cancel{(x+1)}}{\cancel{x}\,(x-1)\,\cancel{(x+1)}} = \frac{6}{x-1}.$$

Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Calculați:

a) $\dfrac{4x-1}{5x^4}+\dfrac{7-6x}{5x^4}$; b) $\dfrac{6x-5}{7x^2}+\dfrac{8-3x}{7x^2}$; c) $\dfrac{7x-2}{2x^3}-\dfrac{3x-1}{2x^3}$; d) $\dfrac{6x-5}{4x^2}-\dfrac{8-2x}{4x^2}$.

b) $\dfrac{6x-5}{7x^2}+\dfrac{8-3x}{7x^2}=$

2. Calculați:

a) $\dfrac{7x^2-3x}{x-1}+\dfrac{x^2-5x}{x-1}$; b) $\dfrac{2x^2+x}{x+2}+\dfrac{x^2+5x}{x+2}$;

c) $\dfrac{3x^2+x}{x-3}-\dfrac{x^2+7x}{x-3}$; d) $\dfrac{5x^2-x}{x+1}-\dfrac{x^2-5x}{x+1}$.

EDITURA PARALELA 45

d) $\frac{5x^2-x}{x+1}-\frac{x^2-5x}{x+1}=$

3. Calculați:

a) $\frac{3x-1}{2x}+\frac{4x+3}{4x}$; b) $\frac{1-6x}{3x}+\frac{2x+1}{9x}$; c) $\frac{4x-7}{3x^2}+\frac{1-6x}{4x^2}$; d) $\frac{7x+8}{5x^2}+\frac{1-4x}{3x^2}$.

d) $\frac{7x+8}{5x^2}+\frac{1-4x}{3x^2}=$

Exerciții și probleme de dificultate redusă

4. Calculați:

a) $\frac{4x-3}{4x}-\frac{1-6x}{8x}$; b) $\frac{1-7x}{9x}-\frac{2-4x}{3x}$; c) $\frac{5x+1}{6x^2}-\frac{4x-5}{9x^2}$; d) $\frac{3+4x}{8x^2}-\frac{3x-2}{6x^2}$.

5. Calculați:

a) $\frac{6x-5}{3x}+\frac{1-2x^2}{x^2}$; b) $\frac{x^4+1}{2x^4}+\frac{3-2x}{4x}$; c) $\frac{2x^3-5}{2x^5}+\frac{1-3x}{3x^3}$.

6. Calculați:

a) $\frac{4x-4}{3x}-\frac{8x^3-5}{6x^3}$; b) $\frac{4x+1}{2x^2}-\frac{10x^2+7}{5x^3}$; c) $\frac{2x+7}{4x^2}-\frac{3x^4-5}{6x^5}$.

EDITURA PARALELA 45

7. Calculați:

a) $\frac{x+3}{2x}-\frac{x-5}{2x-6}$; b) $\frac{4-x}{3x+3}+\frac{x-1}{3x}$; c) $\frac{x+2}{4x}-\frac{x-1}{4x-8}$.

8. Calculați:

a) $\frac{6x^2+1}{4x^2}-\frac{6x+3}{4x+2}$; b) $\frac{4x-1}{8x^2}-\frac{3x-1}{6x^2+2x}$; c) $\frac{3x-7}{9x^2-3x}-\frac{2x-5}{6x^2}$.

Exerciții și probleme de dificultate medie

9. Calculați:

a) $\frac{5x^2-2x^3}{x^5}-\frac{4x-x^2}{x^4}+\frac{x+4}{x^3}$; b) $\frac{2-x}{x^2}+\frac{x^2-5x}{x^3}-\frac{7x-3x^2}{x^4}$.

10. Calculați:

a) $\frac{4-3x^2}{x^2-2x}+\frac{9x-1}{3x-6}$; b) $\frac{4x+1}{4x-4}+\frac{2-3x^2}{3x^2-3x}$; c) $\frac{6x-5}{4x+2}+\frac{7-3x^3}{2x^3+x^2}$.

11. Calculați:

a) $\frac{x^2+2}{6x^2-4x}-\frac{x-5}{9x-6}+\frac{x-1}{3x}$; b) $\frac{x-4}{6x-3}-\frac{x-2}{6x}+\frac{x^2+2x}{8x^2-4x}$.

12. Calculați:

a) $\frac{x}{x^2-6x+9}-\frac{x+3}{x^2-3x}$; b) $\frac{2-x}{x^2+2x}+\frac{x}{x^2+4x+4}$;

c) $\frac{3x-1}{3x^2+x}-\frac{9x}{9x^2+6x+1}$; d) $\frac{1-2x}{2x^2+x}+\frac{4x}{4x^2+4x+1}$.

13. Calculați:

a) $\frac{3x}{x+2}+\frac{6x+4}{x^2-4}-\frac{2x}{x-2}$; b) $\frac{9-15x}{x^2-9}+\frac{4x}{x-3}-\frac{3x}{x+3}$;

c) $\frac{4x}{x-5}-\frac{4x^2+10x}{x^2-25}+\frac{x}{x+5}$; d) $\frac{3x}{2x+1}+\frac{x-2}{1-2x}-\frac{4x+1}{4x^2-1}$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

14. Calculați:

a) $\frac{4x+8}{x^2-9}-\frac{x+1}{x^2+3x}-\frac{3x}{x^2-3x}$; b) $\frac{1-x}{x^2+2x}+\frac{x-3}{2x-x^2}+\frac{2x}{x^2-4}$.

15. Aduceți la forma cea mai simplă expresiile:

a) $E(x)=\frac{x+1}{4x^2-1}-\frac{x^2+2}{2x^3+x^2}+\frac{x+5}{x^2-2x^3}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right\}$;

b) $E(x)=\frac{x^3+4}{3x^4-2x^3}+\frac{6x-1}{4-9x^2}+\frac{x^3-1}{3x^4+2x^3}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3},0,\frac{2}{3}\right\}$.

EDITURA PARALELA 45

16. Aduceți la forma cea mai simplă expresiile:

a) $E(x)=\dfrac{13x}{x^2-6x+9}-\dfrac{x-1}{x^2-9}+\dfrac{2x}{x+3}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3, 3\}$;

b) $E(x)=\dfrac{15x}{x^2+4x+4}+\dfrac{x+1}{x^2-4}-\dfrac{4x}{x-2}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2, 2\}$.

17. Fie expresia $E(x)=\dfrac{x+2}{8x^2+32}-\dfrac{x}{16x-32}-\dfrac{x+2}{16-x^4}+\dfrac{x^2}{8x^2-32}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2, 2\}$.

a) Arătați că forma cea mai simplă a expresiei este $E(x)=\dfrac{x^2+4}{16x^2-64}$.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $E(x)^{-1}\geq 0$.

18. Se consideră expresia $E(x)=\sqrt{\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{2}{x^2-1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$.

a) Arătați că forma cea mai simplă a expresiei este $E(x)=\dfrac{1}{|x^2-1|}$.

b) Rotunjiți la a patra zecimală numărul $n=E(2)+E(3)+E(4)+\ldots+E(11)$.

19. Se consideră expresia $E(x)=\dfrac{x^3-4x^2+4x}{(x-1)^3-(x-1)}-\dfrac{x^2-3}{x^2-1}+\dfrac{x^3+4x^2+4x}{(x+1)^3-(x+1)}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Arătați că $E(x)$ nu depinde de x, pentru orice x din domeniul de definiție.

20. Determinați numărul natural $\overline{xy}$, $x\neq 0$, $y\neq 0$, $x\neq y$, știind că cifrele x și y îndeplinesc condiția $\dfrac{2}{x}+\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{2xy}{x^2-y^2}+\dfrac{y}{x-y}-\dfrac{2}{y}=0$.

Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Calculați:

a) $\dfrac{5x^2-x}{x-4}-\dfrac{4x^2+3x}{x-4}$; b) $\dfrac{2x+1}{6x}+\dfrac{4-x}{3x-9}$.

(3p) **2.** Calculați: $\dfrac{x+1}{2x^2-x}-\dfrac{2x+3}{4x^2-1}+\dfrac{1}{x}$.

(3p) **3.** Se consideră expresia $E(x)=\dfrac{x+3}{x^2-1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{x-3}{x^2-2x+1}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$. Aduceți expresia $E(x)$ la forma cea mai simplă.

EDITURA PARALELA 45

Lecția 6. Ecuații de forma $ax^2 + bx + c = 0$, $x, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$

Citesc și rețin

Definiție: O ecuație de forma $ax^2 + bx + c = 0$, $x, a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ (1) se numește **ecuație de gradul II cu o necunoscută**. Numerele a, b și c se numesc **coeficienții ecuației**.

Definiție: Un număr $u \in \mathbb{R}$ se numește **soluție a ecuației** (1) dacă $au^2 + bu + c = 0$ (u verifică ecuația).

A rezolva ecuația (1) înseamnă a determina mulțimea de soluții:

$$S = \{u \in \mathbb{R} \mid au^2 + bu + c = 0\}.$$

Definiție: Două ecuații de gradul II cu o necunoscută se numesc **echivalente** dacă au aceeași mulțime de soluții.

Observație: Dacă x_1 și x_2 sunt soluțiile reale ale ecuației de gradul II $ax^2 + bx + c = 0$, atunci $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Această egalitate reprezintă descompunerea în factori a sumei algebrice $ax^2 + bx + c$.

Rezolvarea ecuației (1):

A. Cazurile particulare

1. $c = 0$; $ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ sau $ax + b = 0$, deci $S = \left\{0, -\frac{b}{a}\right\}$.

2. $b = 0$; $ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{c}{a} = 0$.

Dacă $\frac{c}{a} > 0$, atunci $S = \varnothing$.

Dacă $\frac{c}{a} < 0$, atunci $x^2 + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 - \left(\sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}\right)\left(x + \sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - \sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|} = 0$ sau $x + \sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|} = 0$, deci $S = \left\{-\sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}, \sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}\right\}$.

B. Cazul general

Definiție: Numărul $\Delta = b^2 - 4ac$ se numește **discriminantul ecuației** (1).

EDITURA PARALELA 45

Pentru rezolvarea ecuației (1) în cazul general $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, procedăm astfel:

1. calculăm $\Delta = b^2 - 4ac$;
2. ▪ dacă $\Delta < 0$, atunci ecuația (1) nu are soluții în $\mathbb{R}$, deci $S = \varnothing$;

   ▪ dacă $\Delta = 0$, atunci ecuația (1) are două soluții egale în $\mathbb{R}$:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}, \text{ deci } S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\};$$

   ▪ dacă $\Delta > 0$, atunci ecuația (1) are două soluții distincte în $\mathbb{R}$:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ și } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ deci } S = \left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}.$$

Cum se aplică?

1. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $3x^2 + 5x = 0$; b) $4x^2 - 100 = 0$.

Soluție:

a) $3x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(3x + 5) = 0$, deci $x = 0$ sau $3x + 5 = 0$; $3x + 5 = 0 \Leftrightarrow 3x = -5 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$, prin urmare $S = \left\{-\frac{5}{3}, 0\right\}$;

b) $4x^2 - 100 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)(x + 5) = 0$, deci $x - 5 = 0$ sau $x + 5 = 0$; $x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ și $x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$; prin urmare, $x \in \{-5, 5\}$.

2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale următoarele ecuații:

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$; b) $(x - 1)^2 = -x(x + 5)$.

Soluție:

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$, deci $a = 1$, $b = 6$, $c = 9$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$, prin urmare $\Delta = 0$.

$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2} = -3$, deci $S = \{-3\}$;

b) $(x - 1)^2 = -x(x + 5) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0$, deci $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$, prin urmare $\Delta > 0$.

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{-3-1}{4} = \frac{-4}{4} = -1$,

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{-3+1}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$, deci $S = \left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}$.

3. Un dreptunghi cu aria de 36 cm^2 are lățimea cu 5 cm mai mică decât lungimea. Calculați perimetrul dreptunghiului.

Soluție:

$L \cdot l = 36 \Leftrightarrow L(L - 5) = 36 \Leftrightarrow L^2 - 5L - 36 = 0$, deci $a = 1$, $b = -5$, $c = -36$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36) = 25 + 144 = 169$, prin urmare $\Delta > 0$.

EDITURA PARALELA 45

$$L_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-\sqrt{169}}{2\cdot 1} = \frac{5-13}{2} = -\frac{8}{2} = -4 \text{ cm}.$$

$$L_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+\sqrt{169}}{2\cdot 1} = \frac{5+13}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ cm, prin urmare } L = 9 \text{ cm}, l = 4 \text{ cm}$$

și perimetrul este egal cu $2(L + l) = 2(9 \text{ cm} + 4 \text{ cm}) = 26$ cm.

Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $x^2 - 2x = 0$; b) $x^2 + 5x = 0$; c) $x^2 + 9x = 0$;
d) $2x^2 - 18x = 0$; e) $2x^2 + 14x = 0$; f) $5x^2 - 10x = 0$;
g) $18x^2 = 24x$; h) $12x^2 = -8x$; i) $15x^2 = 20x$.

h) $12x^2 = -8x$

2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $x^2 - 1 = 0$; b) $x^2 - 4 = 0$; c) $x^2 - 9 = 0$;
d) $4x^2 - 9 = 0$; e) $9x^2 - 4 = 0$; f) $16x^2 - 1 = 0$;
g) $25x^2 = 36$; h) $49x^2 = 64$; i) $81x^2 = 16$.

i) $81x^2 = 16$

EDITURA PARALELA 45

3. Completați următorul tabel:

Ecuația $ax^2 + bx + c = 0$	**Coeficienții**		
	a	b	c
$4x^2 - 5x + 2 = 0$			
$-x^2 + 8x - 3 = 0$			
$-6x^2 + x + 2 = 0$			

4. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. Discriminantul ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a \neq 0$, se calculează cu formula:

A. $\Delta = a^2 - 4bc$; B. $\Delta = b^2 + 4ac$; C. $\Delta = b^2 - 4ac$.

5. Calculați discriminantul și apoi precizați numărul de soluții reale pentru fiecare dintre ecuațiile:

a) $x^2 - 8x + 16 = 0$; b) $3x^2 + 5x + 4 = 0$; c) $2x^2 - 7x + 6 = 0$.

c) $2x^2 - 7x + 6 = 0$

Exerciții și probleme de dificultate redusă

6. Rezolvați următoarele ecuații, unde $a \in \mathbb{R}$:

a) $a^2 - 2a + 1 = 0$; b) $a^2 + 4a + 4 = 0$; c) $a^2 - 6a + 9 = 0$;
d) $4a^2 + 1 = 4a$; e) $9a^2 + 6a = -1$; f) $a^2 + 16 = 8a$;
g) $10a - 1 = 25a^2$; h) $36a^2 = 12a - 1$; i) $4 + 28a = -49a^2$.

7. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$; b) $x^2 - 2x - 3 = 0$; c) $x^2 - 6x + 5 = 0$;
d) $x^2 - 7x + 12 = 0$; e) $x^2 - 9x + 20 = 0$; f) $x^2 + 2x - 35 = 0$;
g) $x^2 + 11 = 4x$; h) $x^2 - 3x = 88$; i) $x^2 + 24 = 10x$.

8. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $2x^2 + 5x - 3 = 0$; b) $3x^2 - 5x - 2 = 0$; c) $4x^2 - 11x - 3 = 0$;
d) $6x^2 + 17x = 14$; e) $2x^2 + 15 = 13x$; f) $3x^2 + 10 = 11x$;
g) $8x^2 + 2x = 3$; h) $5x^2 - 2 = 9x$; i) $3x^2 - 10 = x$.

9. Produsul a două numere naturale consecutive este egal cu 156. Determinați cele două numere.

10. Produsul a două numere întregi consecutive este egal cu 240. Determinați cele două numere.

11. Produsul a două numere întregi consecutive de aceeași paritate este egal cu 143. Determinați cele două numere.

EDITURA PARALELA 45

12. Aplicând formula $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, descompuneți în factori următoarele sume algebrice:

a) $x^2 + x - 2$; b) $x^2 + x - 6$; c) $x^2 - x - 12$;
d) $x^2 - 6x + 8$; e) $x^2 + 4x + 3$; f) $x^2 - 4x - 5$.

Exerciții și probleme de dificultate medie

13. Descompuneți în factori următoarele sume algebrice:

a) $2x^2 + 5x - 3$; b) $3x^2 - 5x - 2$; c) $4x^2 - x - 3$;
d) $5x^2 + 3x - 2$; e) $2x^2 - 3x - 9$; f) $2x^2 + 7x + 6$.

14. Rezolvați în mulțimea numerelor reale următoarele ecuații:

a) $2x(x + 1) - x(x + 4) - 5 = -2$; b) $3x(x - 4) + 2x(3 - x) + 5 = 0$;
c) $x(5x + 2) - 3x(x - 1) - 3 = 0$; d) $x(5x - 1) - 2x(x + 2) - 2 = 0$.

15. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $(4x + 1)^2 - 2x(4x + 3) - 4 = 0$; b) $(x - 4)^2 + (x - 1)(x + 1) = 5x$;
c) $(4x - 1)^2 + (x + 7)^2 - 15x^2 = 58$; d) $(x - 4)^2 + 3(x + 9) = (2x - 5)^2$.

16. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\frac{6-x}{x} + 3 = \frac{x+5}{2}$; b) $\frac{x+3}{x} - 1 = \frac{x-1}{2}$; c) $\frac{x+1}{4} + 1 = \frac{x+3}{x}$.

17. Descompuneți în factori următoarele sume algebrice:

a) $x(7x - 5) - 2x(x + 2) - 2$; b) $x(3x + 7) - 5x(1 - x) - 3$.

18. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $x^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{6})x - 2\sqrt{3} = 0$; b) $x^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{7})x + \sqrt{21} = 0$;
c) $2x^2 + (1 - 2\sqrt{5})x - \sqrt{5} = 0$; d) $4x^2 - (2 + 2\sqrt{5})x + \sqrt{5} = 0$.

19. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\frac{2x-1}{3} + \frac{x+1}{2x+6} = \frac{x}{3x+9}$; b) $\frac{2-21x}{15x-30} = \frac{x}{5} - \frac{8}{3x-6}$; c) $\frac{25x-13}{20x-20} - \frac{3}{5x-5} = \frac{x}{4}$.

20. Un romb cu aria de 72 cm^2 are o diagonală cu 7 cm mai mică decât cealaltă diagonală. Calculați lungimile diagonalelor rombului.

21. Un dreptunghi cu aria de 80 cm^2 are lungimea cu 1 cm mai mare decât triplul lățimii. Calculați perimetrul dreptunghiului.

22. Aflați două numere reale pozitive, știind că au media aritmetică egală cu 9 și media geometrică egală cu 4.

23. Calculați perimetrul triunghiului ABC cu $\sphericalangle A = 90°$, știind că lungimile laturilor sale se exprimă prin trei numere naturale consecutive.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

24. Calculați lungimea muchiei bazei prismei patrulatere regulate care are $\mathcal{A}_t = 16$ cm^2 și $h = 1$ cm.

EDITURA PARALELA 45

25. Calculați lungimea muchiei bazei piramidei patrulatere regulate care are $\mathcal{A}_t = 40$ cm^2 și $a_p = 3$ cm.

26. Un con circular drept are $G = 7$ dm și $\mathcal{A}_t = 44\pi$ dm^2. Calculați raza bazei conului circular drept.

27. Determinați numărul natural n pentru care are loc egalitatea:

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = 7n - 15$; b) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = (n - 2)^2$.

28. Arătați că, pentru orice numere reale m și n, următoarele ecuații au soluții în $\mathbb{R}$:

a) $x^2 - (2m + n)x + 2mn = 0$; b) $x^2 + (m - 3n)x - 3mn = 0$.

29. Notăm cu S suma numerelor naturale mai mari decât n^2 și mai mici decât $(n + 1)^2$. Determinați numărul natural n, știind că $S = 25n$.

30. Se consideră suma $S = -a^2 + 2a + 10$, $a \in \mathbb{Z}$. Determinați numărul întreg a pentru care suma S este număr prim.

Exerciții și probleme pentru olimpiada de matematică

31. Punctele $A(4a + 1, a + 7)$, $B(a, a + 5)$ și $C(1 - 4a, a - 1)$, $a \in \mathbb{Z}$, sunt reprezentate în sistemul de axe ortogonale xOy. Știind că $AB = \frac{BC}{3}$, determinați numărul întreg a.

32. Pentru numerele naturale mai mici sau egale cu $\overline{ab}$, $a \neq 0$, notăm cu Su și Sz suma cifrelor de ordinul unităților, respectiv suma cifrelor de ordinul zecilor. Determinați numărul natural $\overline{ab}$ pentru care $Su = 3Sz$.

Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $x^2 + 4x - 5 = 0$; b) $2x^2 - 3x - 2 = 0$.

(3p) **2.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $(2x - 3)^2 + 2(x^2 - 5) + 11x = 0$.

(3p) **3.** În triunghiul ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$, construim înălțimea AD, $D \in BC$. Știind că $AD = 4\sqrt{5}$ cm, iar lungimile segmentelor BD și CD sunt două numere naturale consecutive de aceeași paritate, calculați $\mathcal{A}_{ABC}$.

EDITURA PARALELA 45

Capitolul III
FUNCȚII

Lecția 7. Noțiunea de funcție. Funcții definite pe mulțimi finite

Citesc și rețin

Definiție: Fie A și B două mulțimi nevide. O lege (un procedeu) f prin care se asociază fiecărui element din A un singur element din B se numește **funcție** definită pe mulțimea A cu valori în mulțimea B.

Notăm $f : A \to B$ și citim „funcția f este definită pe mulțimea A cu valori în mulțimea B”.

Mulțimea A se numește **domeniul de definiție** al funcției, mulțimea B se numește **codomeniul** sau **domeniul de valori** al funcției, iar legea (procedeul) f se numește **legea de corespondență** a funcției.

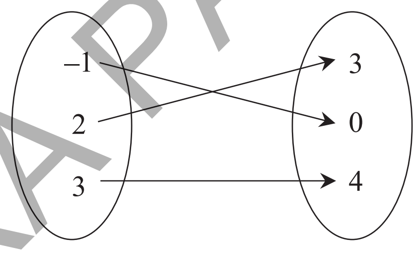
Dacă $x \in A$, elementul $f(x) \in B$ se numește **imaginea lui *x* prin funcția *f*** sau **valoarea funcției *f* în punctul *x***.

Moduri de definire a unei funcții

O funcție poate fi definită:

1. printr-o diagramă

Exemplu:



2. printr-un tabel

Exemplu:

x	-1	2	3
$f(x)$	0	3	4

3. printr-o formulă analitică

Exemplu:

$$f : \{-1, 2, 3\} \to \{0, 3, 4\},\ f(x) = x + 1$$

Definiție: Fie $f : A \to B$ o funcție. Mulțimea $\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in A\}$ se numește **imaginea funcției *f*** sau **mulțimea valorilor funcției *f***. $\operatorname{Im} f \subseteq B$.

Definiție: Fie $f : A \to B$ o funcție. Dacă $A \subset \mathbb{R}$ și $B \subset \mathbb{R}$, atunci funcția f se numește **funcție numerică**.

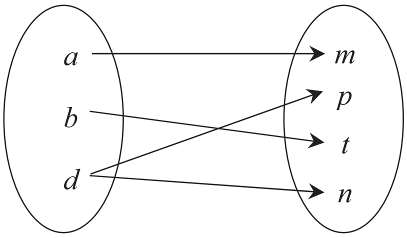
Definiție: Două funcții $f : A \to B$ și $g : C \to D$ se numesc **egale** dacă $A = C$, $B = D$ și $f(x) = g(x)$, oricare ar fi $x \in A$.

Notăm $f = g$ și citim „funcțiile f și g sunt egale”.

EDITURA PARALELA 45

Cum se aplică?

1. Stabiliți dacă diagrama următoare definește o funcție.



Soluție:

Diagrama nu definește o funcție, deoarece elementul d din domeniul de definiție are două imagini, p și n.

2. Se consideră funcția $f : \{-2, -1, 0, 2\} \to \{0, 1, 2, 4\}$, $f(x) = x^2$. Determinați mulțimea Im f.

Soluție:

Calculăm imaginile elementelor din domeniul de definiție: $f(-2) = 4$, $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(2) = 4$, prin urmare Im $f = \{0, 1, 4\}$.

3. Se consideră funcția $g : \{-6, -4, 0, 4, 6\} \to A$, $g(x) = \frac{x}{2} + 5$.

a) Calculați media aritmetică a numerelor $g(-4)$ și $g(4)$.

b) Calculați media geometrică a numerelor $g(-6)$ și $g(6)$.

Soluție:

a) $g(-4) = -\frac{4}{2} + 5 = 3$ și $g(4) = \frac{4}{2} + 5 = 7$; $m_a = \frac{g(-4) + g(4)}{2} = \frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5$;

b) $g(-6) = -\frac{6}{2} + 5 = 2$ și $g(6) = \frac{6}{2} + 5 = 8$; $m_g = \sqrt{g(-6) \cdot g(6)} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$.

Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Citiți următoarele funcții:

a) $f : E \to F$, $f(x) = 10x$;

b) $g : \{-1, 1, 2\} \to \{1, 4\}$, $g(x) = x^2$;

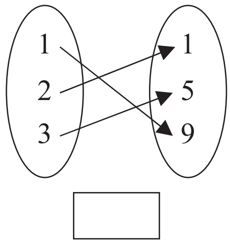
c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = |x|$.

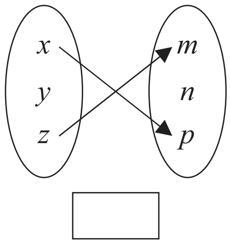
2. Se consideră funcția $f : A \to B$, $f(x) = 5x$. Numiți:

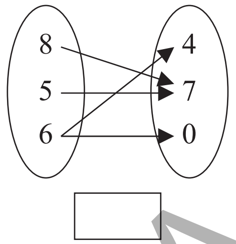
a) domeniul de definiție; b) domeniul de valori; c) legea de corespondență.

EDITURA PARALELA 45

3. Verificați dacă următoarele diagrame reprezintă funcții, completând caseta cu răspunsul corespunzător „Da” sau „Nu”. Justificați răspunsul.

a) 

b) 

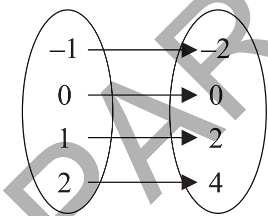
c) 

4. Se consideră funcția $f : A \to B$, definită prin tabelul următor:

x	1	2	3	5
$f(x)$	2	3	4	6

Completați spațiul punctat cu:
a) mulțimea care reprezintă domeniul de definiție al funcției; ....
b) mulțimea care reprezintă domeniul de valori al funcției; ....
c) legea de corespondență (exprimată printr-o formulă) a funcției. ....

5. Se consideră funcția $f : E \to F$, definită prin diagrama următoare:



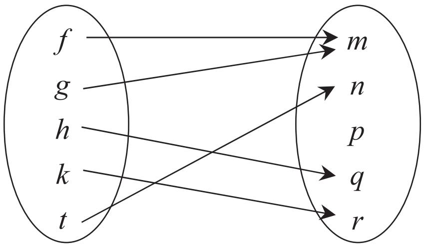
Completați spațiul punctat cu:
a) mulțimea care reprezintă domeniul de definiție al funcției; ....
b) mulțimea care reprezintă domeniul de valori al funcției; ....
c) legea de corespondență (exprimată printr-o formulă) a funcției. ....

6. Se consideră funcția $f : A \to B$, definită prin tabelul următor:

x	–2	1	2	3	7
$f(x)$	–3	0	1	2	6

Completați spațiul punctat cu valoarea funcției f în punctul:
a) 1; .... b) 7; .... c) –2; .... d) 3; .... e) 2. ....

7. Se consideră funcția $s : E \to F$, definită prin diagrama următoare:



EDITURA PARALELA 45

Completați spațiul punctat cu imaginea prin funcția s a elementului:

a) f; .... b) k; .... c) t; .... d) g; .... e) h. ....

8. Se consideră funcția $h : \{13, 17, 24, 33, 91\} \to \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, unde legea de corespondență asociază fiecărui număr din domeniul de definiție produsul cifrelor sale. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $h(13) = 3$; ☐ b) $h(24) = 6$; ☐ c) $h(17) = 7$; ☐

d) $h(33) = 3$; ☐ e) $h(91) = 9$; ☐ f) $h(24) = 8$. ☐

Exerciții și probleme de dificultate redusă

9. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 2$. Calculați:

a) $f(4)$; b) $f(6)$; c) $f(0)$; d) $f(-3)$.

10. Stabiliți care dintre următoarele aplicații reprezintă o funcție:

a) $f : \{-1, 2, 3\} \to \{-3, 6, 9\}$, $f(x) = 3x$; b) $g : \{-2, 1, 2\} \to \{-1, 1, 4\}$, $g(x) = x^2$;
c) $h : \{-1, 0, 1\} \to \{-1, 0, 3\}$, $h(x) = x^3$; d) $s : \{-4, 5\} \to \{-5, 0, 1, 4\}$, $s(x) = -x$.

11. Se consideră funcția $f : \{-3, -1, 0, 1, 2\} \to A$. Determinați Im f pentru legea de corespondență:

a) $f(x) = 3x + 1$; b) $f(x) = 2x - 3$; c) $f(x) = -7x + 4$.

12. Se consideră funcția $f : \left\{4, 25, 36, \frac{49}{16}, \frac{64}{81}\right\} \to A$, $f(x) = \sqrt{x}$. Determinați Im f.

13. Se consideră funcția $g : \{-2, 0, 4\} \to A$. Determinați Im g în fiecare dintre cazurile:

a) $g(x) = \frac{x}{2} + 7$; b) $g(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{2}$; c) $g(x) = 1 - \frac{3x}{2}$.

Exerciții și probleme de dificultate medie

14. Se consideră funcția $f : \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \to A$, $f(x) = 3^x$. Determinați Im f.

15. Se consideră funcția $h : \left\{-\sqrt{2}, 0, 3\sqrt{2}\right\} \to E$. Determinați Im h, știind că:

a) $h(x) = \sqrt{2}x + 5$; b) $h(x) = \sqrt{2}x - 4$; c) $h(x) = 1 - \sqrt{2}x$.

16. Arătați că aplicația $f : \{201, 365, 402\} \to \{2, 3, 4, 5, 9\}$, unde legea de corespondență asociază fiecărui număr din domeniul de definiție divizorul său din domeniul de valori, nu este o funcție.

17. Se consideră funcția $h : \left\{\sqrt{6}, 2\sqrt{6}, 3\sqrt{6}\right\} \to A$, $h(x) = \sqrt{3}x - \sqrt{2}$. Calculați media aritmetică și media geometrică ale numerelor $h(\sqrt{6})$ și $h(3\sqrt{6})$.

18. a) Se consideră funcțiile $f : \{-1, 0, 1\} \to \{0, 1\}$, $f(x) = x^2$ și $g : \{-1, 0, 1\} \to \{0, 1\}$, $g(x) = |x|$. Arătați că $f = g$.

b) Se consideră funcțiile $f : \{-1, 0, 1\} \to \{-1, 0, 1\}$, $f(x) = -x$ și $g : \{-1, 0, 1\} \to \{-1, 0, 1\}$, $g(x) = x^3$. Arătați că $f \neq g$.

c) Se consideră funcțiile $g : \{-1, 0, 1\} \to \{-1, 0, 1\}$, $g(x) = x$ și $h : \{-1, 0, 1\} \to \{-1, 0, 1\}$, $g(x) = x^7$. Arătați că $g = h$.

EDITURA PARALELA 45

19. Se consideră funcția $f: \{-1, 0, 1\} \to \{0, 1, 2\}$. Arătați că următoarele formule descriu funcția f:

a) $f(x) = 1 - x^3$; b) $f(x) = x^2$; c) $f(x) = x^5 + 1$.

20. Se consideră funcția $f: \{-5, -3, 1, 4\} \to B$. Determinați $\text{Im} f$, știind că:

a) $f(x) = |x + 1|$; b) $f(x) = |x - 1|$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

21. Se consideră funcția $f: \left\{-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right\} \to C$. Determinați $\text{Im} f$, dacă:

a) $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$; b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$.

22. Se consideră funcția $r: \{24, 25, 28, 43, 59\} \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, unde legea de corespondență asociază fiecărui număr din domeniul de definiție restul împărțirii lui la 7. Determinați cardinalul mulțimii $\text{Im}\, r$.

23. Se consideră funcția $g: \{13, 14, 15, 16, 25\} \to \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, unde legea de corespondență asociază fiecărui număr din domeniul de definiție numărul său de divizori naturali. Câte submulțimi are mulțimea $\text{Im}\, g$?

24. Se consideră funcția $h: \{34, 45, 56, 64, 86, 92\} \to \{12, 18, 20, 24, 30, 36\}$, unde legea de corespondență asociază fiecărui număr din domeniul de definiție cel mai mic multiplu comun al cifrelor sale. Determinați $\text{Im}\, h$.

25. Determinați imaginea funcției $g: \{-5, -4, -2, -1, 0, 3\} \to \{-5, -4, -3, -1, 0, 1, 3, 4, 5, 7, 8\}$ în următoarele cazuri:

a) $g(x) = \begin{cases} 2x - 1, \text{ dacă } x \geq -1 \\ x + 5, \text{ dacă } x < -1 \end{cases}$; b) $g(x) = \begin{cases} 4 - 3x, \text{ dacă } x \geq 0 \\ 3x + 11, \text{ dacă } x < 0 \end{cases}$.

26. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$. Arătați că $f(x)[f(x + 1) + 1] + 1 \geq 0$.

27. a) Se consideră funcția $g: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $g(n) = (-1)^n \cdot n$. Calculați suma $S = g(1) + g(2) + g(3) + \ldots + g(101)$.

b) Se consideră funcția $h: \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$, $h(n) = \frac{n}{n+1}$. Calculați produsul $P = h(1) \cdot h(2) \cdot h(3) \cdot \ldots \cdot h(100)$.

28. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Arătați că $\frac{f(x) + f(y)}{2} = f\left(\frac{x+y}{2}\right)$.

29. Se consideră funcția $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(x) = 2x + 1$. Arătați că $n \in \mathbb{N}$, în următoarele cazuri:

a) $n = \sqrt{g(0) + g(1) + g(2) + \ldots + g(100)}$; b) $n = \sqrt{g(0) + g(1) + g(2) + \ldots + g(123)}$.

Exerciții și probleme pentru olimpiada de matematică

30. Determinați legea de corespondență $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, pentru funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, știind că $f(0) \cdot f(3x - 1) = x + 0,(6)$.

EDITURA PARALELA 45

31. Arătați că nu există funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea: $f(1 + x) + f(1 - x) = x$.

32. Se consideră funcția $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = n(n + 2)$. Determinați numărul întreg n pentru care $\sqrt{f(n) \cdot f(n+1)+1} = 11$.

Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Se consideră funcția $h : \{-2, -1, 0, 3\} \to E$, $h(x) = 2^x$. Determinați Im h.

(3p) **2.** Se consideră funcția $f : \{-8, -5, 1, 2, 3\} \to A$, $f(x) = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{9}{2}$.

a) Calculați media aritmetică a numerelor $f(-8)$ și $f(2)$.
b) Calculați media geometrică a numerelor $f(-5)$ și $f(1)$.

(3p) **3.** Se consideră funcția $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(n) = n + 1$. Arătați că suma $S = g(0) + g(1) + g(2) + ... + g(48)$ este un număr natural pătrat perfect.

Lecția 8. Graficul unei funcții. Reprezentarea geometrică a graficului unei funcții numerice

Citesc și rețin

Definiție: Fie $f : A \to B$ o funcție. Mulțimea $G_f = \{(x; f(x)) \mid x \in A\}$ se numește **graficul funcției** f.

Definiție: Fie $f : A \to B$ o funcție numerică. Mulțimea punctelor din plan, $M(x; y)$, pentru care $(x; y) \in G_f$ se numește **reprezentarea geometrică a graficului funcției *f*** (**reprezentarea grafică a funcției *f* sau graficul funcției *f***).

Cum se aplică?

1. Se consideră funcția $h : \{-1, 0, 4\} \to \{-8, -2, 0, 2\}$, $h(x) = -2x$. Determinați mulțimea G_h.

Soluție:

Calculăm imaginile elementelor din domeniul de definiție: $h(-1) = 2$, $h(0) = 0$, $h(4) = -8$, prin urmare $G_h = \{(-1; 2), (0; 0), (4; -8)\}$.

2. Se consideră funcția $f : \{-2, -1, 0, 2, 4, 5\} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = \begin{cases} 1-2x, & x \le 0 \\ x-4, & x > 1 \end{cases}$. Determinați mulțimea G_f.

Soluție:

Deoarece elementele -2, -1 și 0 sunt mai mici sau egale cu 0, rezultă că imaginile lor se calculează cu formula $f(x) = 1 - 2x$, prin urmare $f(-2) = 5$, $f(-1) = 3$ și $f(0) = 1$.

EDITURA PARALELA 45

Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+2$. Determinați coordonatele punctului în care se intersectează graficele funcțiilor f și g.

(3p) **2.** Reprezentați grafic în sistemul de axe ortogonale xOy funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-\dfrac{x}{2}+1$.

(3p) **3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-5x+8$.

a) Reprezentați grafic funcția f în sistemul de axe ortogonale xOy.
b) Calculați distanța dintre punctele O și $M(x;\ y)$, știind că punctul M este situat pe graficul funcției f și are proprietatea $x=-y$.

Lecția 10. Funcții de forma $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a, b\in\mathbb{R}$ și $D\subset\mathbb{R}$. Interpretare geometrică. Lecturi grafice

Citesc și rețin

Definiție: Fie $D\subset\mathbb{R}$ un interval și funcția $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a, b\in\mathbb{R}$. Funcția f se numește **restricția funcției** $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=ax+b$ **la intervalul** $\boldsymbol{D}$.

Mulțimea G_f este o submulțime a mulțimii G_g, prin urmare reprezentarea grafică a funcției f este un segment sau o semidreaptă, după cum intervalul D este mărginit, respectiv nemărginit.

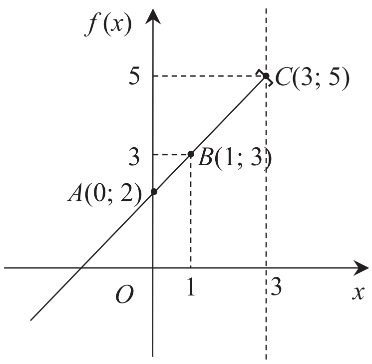
Cum se aplică?

1. Reprezentați grafic funcția $f:(-\infty;\ 3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$, în sistemul de axe ortogonale xOy.

Soluție:

Scriem tabelul de valori ale funcției f pentru $x=0$, $x=1$ și $x=3$.

x	0	1	3
$f(x)$	2	3	5



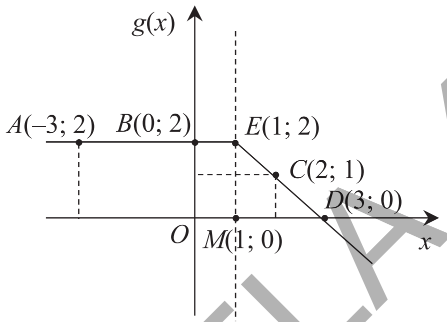
Analizând domeniul de definiție al funcției, rezultă că graficul funcției f este semidreapta închisă cu originea în punctul C și care conține punctele B și A.

EDITURA PARALELA 45

2. Reprezentați grafic funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} 2, x\in(-\infty;1) \\ -x+3, x\in[1;\infty) \end{cases}$, în sistemul de axe ortogonale xOy.

Soluție:

x	–3	0	2	3
$g(x)$	2	2	1	0



Prin punctul $M(1; 0)$ construim o paralelă la axa Oy, cu ajutorul căreia determinăm originea comună $E(1; 2)$ a celor două semidrepte EA (deschisă) și ED (închisă) care formează graficul funcției g.

3. Determinați funcția $h: D\to\mathbb{R}, h(x) = ax + b$ care are drept reprezentare geometrică segmentul $(EF]$, unde $E(-2; -7)$ și $F(3; 8)$.

Soluție:

Observăm că $D = (-2; 3]$, prin urmare $h: (-2; 3]\to\mathbb{R}, h(x) = ax + b$. Avem $h(-2) = -7$ și $h(3) = 8$ sau $-2a + b = -7$, respectiv $3a + b = 8$. Rezolvăm prin metoda substituției sistemul format cu cele două ecuații: $-2a + b = -7$, deci $b = 2a - 7$ și înlocuind în ecuația $3a + b = 8$ obținem $5a - 7 = 8$, de unde rezultă $a = 3$ și $b = -1$. Prin urmare, $h: (-2; 3]\to\mathbb{R}, h(x) = 3x - 1$.

Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 3x, x\in(-\infty;-2] \\ -x, x\in(-2;+\infty) \end{cases}$. Completați tabelul:

x	–4	–3	–2	–1	0	5
$f(x)$						

2. Se consideră funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} x+1, x\in(-\infty;0) \\ x-3, x\in[0;+\infty) \end{cases}$. Completați tabelul:

x	–3	–2	0	1	4	5
$g(x)$						

3. Se consideră funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} x-2, x\in(-\infty;-1] \\ 1-x, x\in(-1;+\infty) \end{cases}$. Completați caseta cu simbolul corespunzător „$\in$” sau „$\notin$”:

a) $(-5; -7)\ \square\ G_h$; b) $(-1; -3)\ \square\ G_h$; c) $(2; -1)\ \square\ G_h$; d) $(4; -5)\ \square\ G_h$.

4. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. Reprezentarea grafică a funcției $f: [1; +\infty)\to\mathbb{R}, f(x) = 3x - 1$, în sistemul de axe ortogonale xOy este:

A. o dreaptă; B. o semidreaptă; C. un segment.

EDITURA PARALELA 45

5. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. Reprezentarea grafică a funcției $g : [-4; 2) \to \mathbb{R}$, $g(x) = -x + 5$ în sistemul de axe ortogonale xOy este:

A. o dreaptă; B. o semidreaptă; C. un segment.

Exerciții și probleme de dificultate redusă

6. Reprezentați grafic funcția f în sistemul de axe ortogonale xOy, în următoarele cazuri:

a) $f : (-\infty; 0] \to \mathbb{R}, f(x) = 2x$; b) $f : (-1; +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = -x$;

c) $f : (-\infty; 2) \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$; d) $f : [-3; +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = 1 - 4x$.

7. Reprezentați grafic în sistemul de axe ortogonale xOy următoarele funcții:

a) $f : [-2; 1) \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + 2$; b) $g : [-2; 4] \to \mathbb{R}, g(x) = 5 - 2x$.

8. Reprezentați grafic în sistemul de axe ortogonale xOy următoarele funcții:

a) $h : (-\infty; 3] \to \mathbb{R}, h(x) = \sqrt{3}x - 4$; b) $s : (-4; +\infty) \to \mathbb{R}, s(x) = -\sqrt{2}x + 2$.

9. Reprezentați grafic funcția h în sistemul de axe ortogonale xOy, în următoarele cazuri:

a) $h : (-\infty; 2] \to \mathbb{R}, h(x) = \dfrac{x}{2}$; b) $h : (-1; +\infty) \to \mathbb{R}, h(x) = \dfrac{x}{3}$.

10. Reprezentați grafic funcția g în sistemul de axe ortogonale xOy, în următoarele cazuri:

a) $g : [-2; 2] \to \mathbb{R}, h(x) = \dfrac{3}{2}x - 1$; b) $g : (0; 3] \to \mathbb{R}, h(x) = 7 - \dfrac{5}{3}x$.

Exerciții și probleme de dificultate medie

11. Reprezentați grafic funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ în sistemul de axe ortogonale xOy, în următoarele cazuri:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, x \in (-\infty; 2] \\ 2, x \in (2; +\infty) \end{cases}$; b) $f(x) = \begin{cases} -1, x \in (-\infty; -1] \\ -x + 2, x \in (-1; +\infty) \end{cases}$.

12. Reprezentați grafic funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ în sistemul de axe ortogonale xOy, știind că:

a) $f(x) = \begin{cases} x - 3, x \in (-\infty; 0] \\ 1 - 3x, x \in (0; +\infty) \end{cases}$; b) $f(x) = \begin{cases} 4x + 5, x \in (-\infty; -1) \\ 2x - 9, x \in [-1; +\infty) \end{cases}$.

13. Reprezentați grafic funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ în sistemul de axe ortogonale xOy, în următoarele cazuri:

a) $f(x) = |x|$; b) $f(x) = -|x|$.

14. Reprezentați grafic funcția $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ în sistemul de axe ortogonale xOy, în următoarele cazuri:

a) $h(x) = |2x|$; b) $h(x) = |3x|$.

15. Determinați funcția $g : E \to \mathbb{R}$, $g(x) = ax + b$ care are drept reprezentare grafică semidreapta:

a) $[OA$, unde $O(2; -3)$ și $A(3; -2)$; b) $(OA$, unde $O(-1; 5)$ și $A(-3; 7)$;

c) $(OA$, unde $O(-3; -7)$ și $A(0; 5)$; d) $[OB$, unde $O(4; -5)$ și $B(3; -2)$.

EDITURA PARALELA 45

16. Determinați funcția $f : D \to \mathbb{R},\ f(x) = mx + n$ care are drept reprezentare grafică segmentul:

a) (AB), unde $A(-1; -4)$ și $B(2; 5)$;
b) $[AB)$, unde $A(-4; 6)$ și $B(-2; 2)$;
c) $[AB]$, unde $A(-3; -5)$ și $B(3; 3)$;
d) $(AB]$, unde $A(-4; 2)$ și $B(-2; 5)$.

17. Punctul $A(2; 5)$ aparține graficului funcției:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} ax - 1, x \in (-\infty; 1] \\ 3x + a, x \in (1; +\infty) \end{cases}.$$

a) Determinați numărul real a.
b) Reprezentați grafic funcția f.

18. Se consideră funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} 7x + 7, x \in (-\infty; 0) \\ -x + 7, x \in [0; +\infty) \end{cases}$.

a) Reprezentați grafic funcția g în sistemul de axe ortogonale xOy.

b) Arătați că perimetrul triunghiului format de graficul funcției g cu axa absciselor depășește 24,8 u.

19. Se consideră funcția $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} -2x - 2, x \in (-\infty; 1] \\ x - 5, x \in (1; +\infty) \end{cases}$.

a) Reprezentați grafic funcția h în sistemul de axe ortogonale xOy.

b) Calculați aria triunghiului format de graficul funcției h cu axa absciselor.

20. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x| - 2$. Reprezentați grafic funcția f în sistemul de axe ortogonale xOy și apoi determinați măsurile unghiurilor triunghiului format de graficul funcției cu axa absciselor.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

21. Se consideră funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} 2ax - b, x \in (-\infty; 0) \\ 2ab - x, x \in [0; +\infty), \text{ unde } a, b \in \mathbb{R} \end{cases}$. Știind că punctele $A(-3; 7)$ și $B(a^2; b^2)$ aparțin graficului funcției g, reprezentați grafic funcția în sistemul de axe ortogonale xOy.

22. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 4x - 7, x \in (-\infty; 1] \\ x + 5, x \in (1; +\infty) \end{cases}$. Determinați numărul natural n pentru care suma $f(1 - n) + f(n^2 + 2)$ este minimă.

Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Reprezentați grafic funcția $g : (-3; 2) \to \mathbb{R},\ g(x) = 2x - 3$ în sistemul de axe ortogonale xOy.

EDITURA PARALELA 45

12. Un automobil a parcurs distanța dintre două localități, adaptând viteza la condițiile de trafic conform tabelului următor:

Viteza (km/h)	65	48	75	50	64
Timpul (min)	12	10	4	6	15

Calculați viteza medie (exprimată în kilometri/oră) cu care automobilul a parcurs distanța dintre cele două localități.

Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Precizați valoarea modală a seriei statistice:

Valorile caracteristicii	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
Frecvența	8	13	11	9	14	15	12	7

(3p) **2.** Măsurându-se greutatea a șapte sportivi de la aceeași categorie, legitimați la un club de box, s-au obținut următoarele rezultate: 63,2 kg, 63,7 kg, 63,4 kg, 63,1 kg, 63,5 kg, 63,6 kg, 63,3 kg. Determinați greutatea medie a unui sportiv de la această categorie, cu ajutorul medianei.

(3p) **3.** La un test la matematică, elevii unei clase au obținut două note de 4, cinci note de 5, cinci note de 6, două note de 7, trei note de 8, șase note de 9, două note de 10. Scrieți datele problemei sub forma unei serii statistice și calculați media clasei la acest test.

Teste de evaluare sumativă

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea I – Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(1p) **1.** Domeniul de definiție al funcției h definite prin tabelul

x	a	b	c
$h(x)$	r	v	t

este mulțimea:

A. $\{a, b, c\}$; B. $\{r, v\}$; C. $\{b, c\}$; D. $\{r, v, t\}$.

(1p) **2.** Se consideră funcția $f: \{-3, 4\} \to \{-4, 3\}$, $f(x) = -x$. Perechea care aparține mulțimii G_f este:

A. $(-3; -4)$; B. $(3; 3)$; C. $(4; 4)$; D. $(-3; 3)$.

EDITURA PARALELA 45

(1p) **3.** Imaginea funcției $f : \{-1, 0, 3\} \to \mathbb{Z}, f(x) = x - 1$ este mulțimea:

A. $\{-1, 0\}$; B. $\{-2, -1, 2\}$; C. $\{-3, -2, 1\}$; D. $\{-1, 0\}$.

(1p) **4.** Se consideră funcția $g : \{0, -1\} \to \{-1, 0\}$. Formula care este lege de corespondență pentru funcția g este:

A. $2x - 1$; B. $x^3 - 1$; C. $x^2 - 1$; D. $2x + 1$.

(1p) **5.** Graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{5}x - 10$ intersectează axa Ox în punctul:

A. $M(0;\ 2\sqrt{5})$; B. $M(0; -10)$; C. $M(-10; 0)$; D. $M(2\sqrt{5}; 0)$.

Partea a II-a – La următoarele probleme se cer rezolvările complete.

(1p) **1.** Reprezentați grafic funcția $f : (-2; 3] \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$ în sistemul de axe ortogonale xOy.

(1p) **2.** Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 5$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 4x - 13$. Dacă $G_f \cap G_g = \{M\}$, calculați distanța dintre punctele M și O, unde O este originea sistemului de axe ortogonale xOy.

(1p) **3.** Se consideră funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 2x - \sqrt{6}$. Determinați punctul $D(x; y)$ situat pe graficul funcției g cu proprietatea $x = y$.

(1p) **4.** Calculați distanța de la punctul $A(0; -6)$ la graficul funcției $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -1,(3)x + 4$.

Testul 2

Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea I – Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(1p) **1.** Se consideră următoarea serie statistică:

Valorile caracteristicii	x_1	x_2	x_3	x_4
Frecvența	11	13	17	19

Valoarea x_3 are frecvența egală cu:

A. 11; B. 13; C. 17; D. 19.

(1p) **2.** Se consideră funcția $f : \{0, 2\} \to A, f(x) = x - 1$. Valoarea funcției f în punctul 0 este egală cu:

A. -1; B. 2; C. 3; D. -2.

(1p) **3.** Punctul în care graficul funcției $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = 2\sqrt{7}x - 1$ intersectează axa Oy are coordonatele:

A. $(3; 0)$; B. $(0, -1)$; C. $(0, -2)$; D. $(2; 0)$.

(1p) **4.** Imaginea funcției $g : \{-1, 0, 3\} \to \mathbb{Z}, g(x) = x^2 - 3$ este mulțimea:

A. $\{-2; 5\}$; B. $\{-4, -2, 8\}$; C. $\{-3, -2, 6\}$; D. $\{-3, 8\}$.

(1p) **5.** Punctul $A(1; 7)$ aparține graficului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 5x - 2a$ dacă:

A. $a = 3$; B. $a = -2$; C. $a = -1$; D. $a = 4$.

EDITURA PARALELA 45

(1p) **2.** Graficele funcțiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 1 - 2\sqrt{2}x$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{2}x - 5$ se intersectează în punctul A. Determinați coordonatele punctului A.

(1p) **3.** Se consideră funcția $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = -\frac{1}{2}x - 2$. Calculați aria triunghiului determinat de graficul funcției h cu axele sistemului de coordonate xOy.

(1p) **4.** Se consideră funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x + 2$. Determinați punctele de pe graficul funcției g situate la distanța $\sqrt{10}$ u față de originea sistemului de coordonate.

Fişă pentru portofoliul elevului

Numele și prenumele:
Clasa a VIII-a
Capitolul: Funcții (Lecțiile 7 – 11)
Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. Dacă propoziția este adevărată, subliniați litera A, iar dacă propoziția este falsă, subliniați litera F.

(7p) **1.** Domeniul de definiție al funcției $f : \{1, 2, 3\} \to \{2, 4, 6\}, f(x) = 2x$ este mulțimea $\{1, 2, 3\}$. A F

(7p) **2.** Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție și $f(x) = f(y)$, atunci $x = y$. A F

(7p) **3.** Graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$ trece prin originea sistemului de axe ortogonale xOy. A F

II. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect.

(7p) **1.** Se consideră funcția $h : \{-3, 2, 4\} \to \mathbb{Z}, h(x) = -x + 2$. Dacă $h(x) < 0$, atunci $x =$ ....

(7p) **2.** Punctul în care graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 5x + 3$ intersectează axa ordonatelor este M(............; ....).

(7p) **3.** Se consideră funcția $g : \{-1, 0, 1\} \to \mathbb{N}, g(x) = |x|$. Cardinalul mulțimii Im g este egal cu ....

III. Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(8p) **1.** Distanța de la originea sistemului de axe ortogonale xOy la punctul $A(3; f(3))$ situat pe graficul funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x - 1$ este egală cu:

A. 4 u; B. 5 u; C. 6 u; D. 7 u.

(8p) **2.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$. Numărul real a pentru care perechea $(a; 2a) \in G_f$ este egal cu:

A. 1; B. 4; C. 6; D. 2.

(8p) **3.** Reprezentările grafice ale funcțiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 1,(3)x - 3$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 0,(6)x + 1$ sunt concurente în punctul M. Coordonatele punctului M sunt:

A. $M(6; 7)$; B. $M(-2; 3)$; C. $M(2; -3)$; D. $M(6; 5)$.

EDITURA PARALELA 45

La exercițiile IV. și V. scrieți pe fișă rezolvările complete.

IV. Funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, îndeplinește condiția

(8p) $2a \cdot [g(1) - 1] + b \cdot g(0) + 1 = 0$. Reprezentați grafic funcția g în sistemul de axe ortogonale xOy și determinați măsura unghiului format de graficul funcției cu axa ordonatelor.

V. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 4$.

(8p) a) Graficul funcției f intersectează axele sistemului ortogonal xOy în punctele A și B. Determinați coordonatele punctelor A și B și apoi reprezentați grafic funcția.

(8p) b) Dacă M este mijlocul segmentului AB, iar N este simetricul punctului M față de punctul O, arătați că $\mathcal{A}_{AON} = \mathcal{A}_{BON}$.

Probleme din realitatea cotidiană

1. Pentru pregătirea unui test, un elev a lucrat 14 probleme în 4 zile, lucrând în prima zi două probleme, iar în fiecare dintre zilele următoare cu o problemă mai mult decât în ziua precedentă. Descrieți printr-o formulă funcția care calculează numărul problemelor rezolvate de elev în fiecare zi.

2. De la ora 8 la ora 9, o floare de salcâm este vizitată de două albine, iar în fiecare dintre următoarele 5 ore numărul albinelor care vizitează floarea respectivă se dublează.

EDITURA PARALELA 45

Descrieți printr-o formulă funcția care calculează numărul albinelor care vizitează floarea de salcâm în fiecare oră din intervalul de timp 8-14.

3. O placă de faianță în formă de dreptunghi are lungimea cu 1 dm mai mică decât dublul lățimii și aria egală cu 6 dm^2. Calculați dimensiunile plăcii de faianță.

4. O piscină în formă de romb cu aria de 96 m^2 are una dintre diagonale cu 4 m mai mică decât cealaltă diagonală. Calculați perimetrul piscinei.

5. O livadă de piersici, în formă de dreptunghi, urmează să fie împrejmuită cu un gard. Știind că livada are lungimea cu 7 dam mai mare decât lățimea și aria egală cu 78 dam^2, calculați lungimea gardului.

6. Un aspirator este ambalat într-o cutie de carton în formă de prismă patrulateră regulată cu înălțimea de 5 dm și aria totală egală cu 78 dm^2. Calculați volumul cutiei de carton.

7. Pentru construcția unui stâlp de beton se folosește un cofraj în formă de cilindru circular drept cu înălțimea de 4 m și aria totală egală cu 1,68π m^2. Calculați volumul stâlpului de beton.

8. Temperatura maximă pe țară în ultimele 5 zile ale lunii august a fost dată de funcția:

$$f: \{27, 28, 29, 30, 31\} \to \mathbb{N}^*, f(z) = \begin{cases} z-1, \text{ în zilele cu număr impar} \\ z+2, \text{ în zilele cu număr par} \end{cases}.$$

Precizați ziua din intervalul 27-31 august în care s-a înregistrat cea mai mare temperatură.

9. Numărul exercițiilor rezolvate de un elev în fiecare zi din intervalul de timp 2-7 iunie este dat de funcția:

$$g: \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} \to \mathbb{N}, g(z) = \begin{cases} 2z-1, \text{ pentru } z \text{ număr prim} \\ z+4, \text{ pentru } z \text{ număr compus} \end{cases}.$$

Aflați câte exerciții a rezolvat elevul în intervalul de timp respectiv.

10. La un test de matematică, elevii clasei a VIII-a B au obținut trei note de 4, patru note de 5, trei note de 6, cinci note de 7, patru note de 8, patru note de 9 și două note de 10. Calculați media clasei la acel test.

11. Lățimea, lungimea și diagonala unui teren de fotbal sunt exprimate prin trei numere naturale consecutive exprimate în decametri. Calculați aria suprafeței terenului de fotbal, exprimată în metri pătrați.

12. Suma numerelor apartamentelor situate pe scara unui bloc de locuințe este egală cu 136. Câte apartamente sunt pe acea scară?

13. O grădină în formă de dreptunghi cu perimetrul de 42 dam și aria egală cu 108 dam^2 este străbătută de o conductă de apă, care trece prin două dintre vârfurile opuse ale acesteia. Calculați lungimea conductei.

14. Media aritmetică și media geometrică ale vârstelor a doi frați sunt egale cu 13 ani, respectiv 12 ani. Calculați vârstele celor doi frați.

EDITURA PARALELA 45

GEOMETRIE

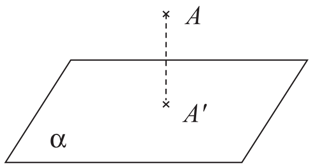
Capitolul I

ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

Lecția 1. Proiecții de puncte, de segmente și de drepte

Citesc și rețin

Definiție: Proiecția unui punct exterior unui plan pe planul respectiv este piciorul perpendicularei construite din punctul respectiv pe acel plan.



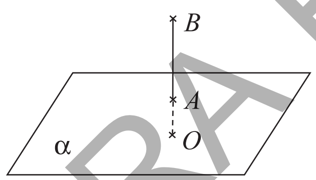
Notăm $pr_{\alpha} A = A'$.

Proiecția unui segment: Proiecția segmentului AB pe planul α este segmentul $A'B'$, ale cărui extremități sunt proiecțiile extremităților segmentului dat pe planul α.

Observație: Proiecția segmentului *AB* pe planul α este:

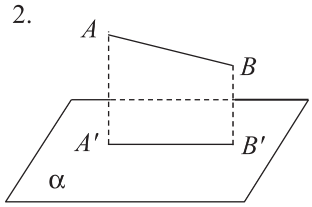
1. un punct, dacă dreapta suport a segmentului este perpendiculară pe planul α;
2. un segment, dacă dreapta suport a segmentului nu este perpendiculară pe planul α.

1.



Notăm $pr_{\alpha} AB = O$.

2.



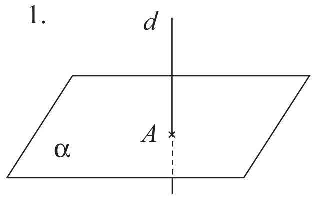
Notăm $pr_{\alpha} AB = A'B'$.

Proiecția unei drepte: Proiecția dreptei d pe planul α este dreapta determinată de proiecțiile pe planul α a două puncte diferite ale dreptei d.

Observație: Proiecția dreptei *d* pe planul α este:

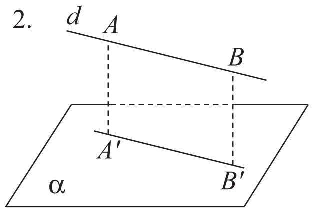
1. un punct, dacă dreapta d este perpendiculară pe planul α;
2. o dreaptă, dacă dreapta d nu este perpendiculară pe planul α.

1.



Notăm $pr_{\alpha} d = A$.

2.



Notăm $pr_{\alpha} d = A'B'$.

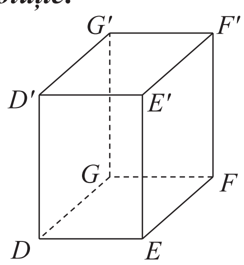
EDITURA PARALELA 45

Cum se aplică?

1. Se consideră prisma patrulateră regulată $DEFGD'E'F'G'$. Determinați:

a) $\text{pr}_{(DEF)} D'$; b) $\text{pr}_{(D'DG)} F'$.

Soluție:

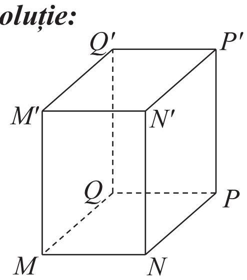


a) Deoarece $D'D \perp (DEF)$, rezultă că proiecția punctului D' pe planul (DEF) este punctul D;
b) Deoarece $F'G' \perp (D'DG)$, rezultă că proiecția punctului F' pe planul $(D'DG)$ este punctul G'.

2. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $MNPQM'N'P'Q'$. Determinați:

a) $\text{pr}_{(MNP)} N'P'$; b) $\text{pr}_{(M'MN)} NQ'$.

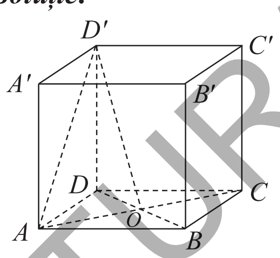
Soluție:



a) Observăm că $\text{pr}_{(MNP)} N' = N$ și $\text{pr}_{(MNP)} P' = P$, deci $\text{pr}_{(MNP)} N'P' = NP$;
b) Observăm că $\text{pr}_{(M'MN)} N = N$ și $\text{pr}_{(M'MN)} Q' = M'$, deci $\text{pr}_{(M'MN)} NQ' = M'N$.

3. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia de 4 cm. Aflați lungimea proiecției segmentului AD' pe planul $(D'DB)$.

Soluție:



$AC \cap BD = \{O\}$. Deoarece $AC \perp BD$ și $AC \perp D'D$, rezultă că $AC \perp (B'BD)$, prin urmare $\text{pr}_{(D'DB)} A = O$ și, deoarece $\text{pr}_{(D'DB)} D' = D'$, deducem că $\text{pr}_{(D'DB)} AD' = OD'$. În $\Delta D'DO$ cu $\sphericalangle D = 90°$, aplicând teorema lui Pitagora rezultă că $D'O^2 = D'D^2 + DO^2$ și după efectuarea calculelor obținem $D'O = 2\sqrt{6}$ cm.

Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. Dacă proiecția punctului E pe planul θ este punctul F, atunci:

A. $EF \parallel \theta$; B. $EF \perp \theta$.

2. Citiți următoarele notații:

a) $\text{pr}_{\alpha} A = B$; b) $\text{pr}_{(ABC)} M = N$; c) $\text{pr}_{\beta} P = E$.

EDITURA PARALELA 45

3. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect. Dacă proiecția segmentului MN pe planul β este segmentul PQ, atunci:

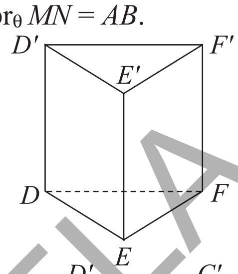
A. $MN \not\perp \beta$; B. $MN \perp \beta$.

4. Citiți următoarele notații, unde AB, EF, MN și PQ sunt segmente:

a) $\text{pr}_{\alpha} AB = PQ$; b) $\text{pr}_{(ABC)} EF = G$; c) $\text{pr}_{\theta} MN = AB$.

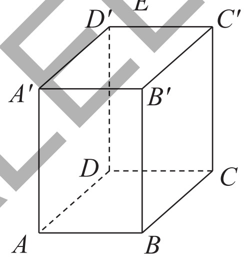
5. În figura alăturată este reprezentată prisma triunghiulară regulată $DEFD'E'F'$. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor următoare:

a) $\text{pr}_{(DEF)} D' = D$; ☐
b) $\text{pr}_{(DEF)} E' = F$; ☐
c) $\text{pr}_{(D'E'F')} F = F'$. ☐



6. În figura alăturată este reprezentat paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect:

a) $\text{pr}_{(ABC)} A' =$ ....;
b) $\text{pr}_{(ABC)} C' =$ ....;
c) $\text{pr}_{(A'B'C')} B =$ ....

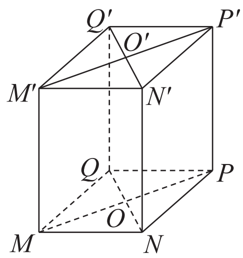


7. Pentru paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ reprezentat în figura de la problema anterioară, completați spațiile punctate cu răspunsul corect:

a) $\text{pr}_{(A'AD)} B =$ ....; b) $\text{pr}_{(C'CD)} A =$ ....;
c) $\text{pr}_{(A'AB)} C' =$ ....; d) $\text{pr}_{(B'BC)} D' =$ ....

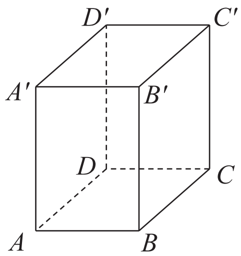
8. În figura alăturată este reprezentată prisma patrulateră regulată $MNPQM'N'P'Q'$, unde $MP \cap NQ = \{O\}$ și $M'P' \cap N'Q' = \{O'\}$. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) $\text{pr}_{(N'NQ)} M = N$; ☐
b) $\text{pr}_{(M'MP)} N = O$; ☐
c) $\text{pr}_{(Q'QN)} P' = O'$; ☐
d) $\text{pr}_{(M'MP)} Q' = O'$. ☐



9. În figura alăturată este reprezentat paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) $\text{pr}_{(ABC)} A'B' = AB$; ☐
b) $\text{pr}_{(A'B'C')} BC = B'C'$; ☐
c) $\text{pr}_{(ABC)} A'C' = AC$; ☐
d) $\text{pr}_{(A'B'C')} BD = B'D'$. ☐



10. Pentru paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ reprezentat în figura de la problema anterioară, completați spațiile punctate cu răspunsul corect:

a) $\text{pr}_{(A'B'C')} BC' =$ ....; b) $\text{pr}_{(ABC)} D'B =$................;
c) $\text{pr}_{(A'AD)} A'C =$.................; d) $\text{pr}_{(B'BC)} B'D =$................ .

EDITURA PARALELA 45

Exerciții și probleme de dificultate redusă

11. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Determinați:

a) $pr_{(D'DB)} A'D'$; b) $pr_{(A'AC)} AB$; c) $pr_{(B'BD)} B'C$; d) $pr_{(A'AC)} AD'$.

12. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu vârful în V, care are muchia bazei de $4\sqrt{2}$ cm și muchia laterală de 5 cm. Calculați:

a) lungimea proiecției segmentului AD pe planul (VBD);
b) lungimea proiecției segmentului VB pe planul (VAC).

13. Fie paralelipipedul dreptunghic $DEFGD'E'F'G'$ cu $DE = 4\sqrt{2}$ cm, $DG = 2\sqrt{2}$ cm și $DD' = 8$ cm. Calculați lungimea proiecției diagonalei EG' pe planul:

a) $(D'E'F')$; b) $(D'DE)$; c) $(E'EF)$.

Exerciții și probleme de dificultate medie

14. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat cu muchia de 6 cm, în care notăm cu M mijlocul muchiei CD. Calculați:

a) lungimea proiecției segmentului AB pe planul (BCD);
b) lungimea proiecției segmentului AD pe planul (ABM).

15. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia de $6\sqrt{2}$ cm. Calculați:

a) lungimea proiecției segmentului $D'B$ pe planul $(A'AD)$;
b) lungimea proiecției segmentului BC' pe planul $(B'BD)$.

16. În prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$, care are muchia bazei de 8 cm și înălțimea de $2\sqrt{7}$ cm, notăm cu M mijlocul muchiei $A'B'$.

a) Calculați lungimea proiecției segmentului AM pe planul $(A'AC)$.
b) Calculați lungimea proiecției segmentului CM pe planul $(B'BD)$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

17. Se consideră trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ cu $L = 8$ cm, $l = 6$ cm și $m = 3\sqrt{3}$ cm. Calculați lungimea proiecției diagonalei $A'C$ pe planul $(B'BD)$.

18. Prisma triunghiulară regulată $DEFD'E'F'$ are muchia bazei de 4 cm și înălțimea de $2\sqrt{6}$ cm. Arătați că proiecția punctului D pe planul $(ED'F)$ este centrul de greutate al triunghiului $ED'F$.

19. Se consideră prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ și notăm cu O proiecția punctului A pe planul $(BA'C)$. Știind că $\mathcal{A}_{BA'C} = 7\sqrt{7}$ cm^2 și că punctul O este centrul cercului circumscris triunghiului $BA'C$, determinați raza acestui cerc.

20. Se consideră triedrul tridreptunghic $OABC$ cu vârful în O. Arătați că proiecția punctului O pe planul (ABC) este ortocentrul triunghiului ABC.

Exerciții și probleme pentru olimpiada de matematică

21. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Dacă punctul B' se proiectează pe planul $(A'BC')$ în centrul de greutate al triunghiului $A'BC'$, arătați că $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

EDITURA PARALELA 45

22. Arătați că o piramidă patrulateră regulată are muchia bazei egală cu muchia laterală, dacă și numai dacă centrul bazei se proiectează pe planul unei fețe laterale în centrul cercului circumscris acesteia.

Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Se consideră prisma patrulateră regulată $MNPQM'N'P'Q'$. Determinați:
a) $pr_{(M'N'P')} PQ$; b) $pr_{(N'NP)} M'P$; c) $pr_{(N'NQ)} MQ'$.

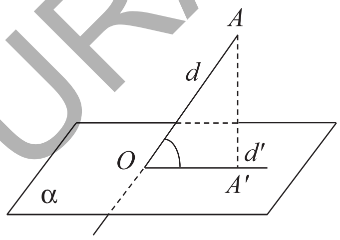
(3p) **2.** Trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are $L = 4\sqrt{2}$ cm, $l = 2\sqrt{2}$ cm și $a_t = 4$ cm. Calculați lungimea proiecției segmentului BC' pe planul $(A'AC)$.

(3p) **3.** Se consideră prisma triunghiulară regulată $DEFD'E'F'$ și notăm cu O proiecția punctului D pe planul $(D'EF)$. Știind că punctul O este centrul cercului circumscris triunghiului $D'EF$, determinați măsura unghiului dintre dreptele $D'E$ și $F'F$.

Lecția 2. Unghiul dintre o dreaptă și un plan. Lungimea proiecției unui segment

Citesc și rețin

Definiție: Unghiul dintre o dreaptă și un plan (dreapta este secantă cu planul) este unghiul format de dreapta respectivă cu proiecția ei pe plan.



Notăm $\sphericalangle(d, \alpha) = \sphericalangle(d, d')$.

Observație: Dacă $d \subset \alpha$ sau $d \parallel \alpha$, atunci $\sphericalangle(d, \alpha) = 0°$, iar dacă $d \perp \alpha$, atunci $\sphericalangle(d, \alpha) = 90°$.

Teoremă: Dacă segmentul $A'B'$ este proiecția segmentului AB pe planul α, atunci lungimea segmentului $A'B'$ este egală cu produsul dintre lungimea segmentului AB și cosinusul unghiului dintre dreapta AB și planul α.

EDITURA PARALELA 45

Capitolul II

ARII ŞI VOLUME ALE UNOR CORPURI GEOMETRICE

II.1. POLIEDRE

Definiție: Un corp geometric care este mărginit numai de fețe plane se numește **poliedru**.

Definiții:

Aria laterală a unui poliedru, notată $\mathcal{A}_l$, reprezintă suma ariilor fețelor laterale ale poliedrului.

Aria totală a unui poliedru, notată $\mathcal{A}_t$, reprezintă suma dintre aria laterală a poliedrului și aria bazei (bazelor).

Volumul unui poliedru, notat $\mathcal{V}$, reprezintă spațiul (geometric) pe care îl ocupă acesta.

Observație: În acest capitol pentru poliedrele studiate pe lângă calculul ariilor și volumelor se are în vedere și calculul unor distanțe și al unor măsuri de unghiuri.

Lecția 6. Prisma regulată

Citesc și rețin

Notații utilizate: h – lungimea înălțimii prismei, $\mathcal{P}_b$ – perimetrul bazei, $\mathcal{A}_b$ – aria bazei, $\mathcal{A}_l$ – aria laterală a prismei, $\mathcal{A}_t$ – aria totală a prismei, $\mathcal{V}$ – volumul prismei.

$\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot h,$ $\qquad$ $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b,$ $\qquad$ $\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h.$

Cum se aplică?

1. Se consideră prisma triunghiulară regulată $DEFD'E'F'$, care are muchia bazei de 4 cm și aria laterală egală cu $48\sqrt{3}$ cm^2. Calculați:

a) h; $\qquad$ b) $\mathcal{A}_t$; $\qquad$ c) $\mathcal{V}$.

Soluție:

a) $\mathcal{A}_l = 48\sqrt{3}$ cm^2, deci $\mathcal{P}_b \cdot h = 48\sqrt{3}$ cm^2 sau $12 \cdot h$ cm $= 48\sqrt{3}$ cm^2, de unde rezultă că $h = \dfrac{48\sqrt{3}}{12}$ cm și obținem $h = 4\sqrt{3}$ cm;

b) $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b = 48\sqrt{3}\text{ cm}^2 + 2 \cdot \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}\text{ cm}^2 = 48\sqrt{3}\text{ cm}^2 + \dfrac{16\sqrt{3}}{2}\text{ cm}^2 =$ $= 48\sqrt{3}\text{ cm}^2 + 8\sqrt{3}\text{ cm}^2 = 56\sqrt{3}\text{ cm}^2$;

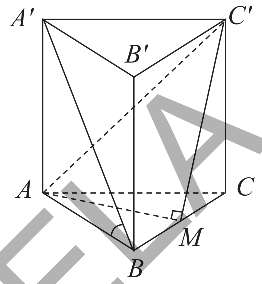
c) $\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = \dfrac{16\sqrt{3}}{4} \cdot 4\sqrt{3}\text{ cm}^3 = 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}\text{ cm}^3 = 48\text{ cm}^3$.

EDITURA PARALELA 45

2. În prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, care are muchia bazei de $2\sqrt{2}$ cm și muchia laterală de $2\sqrt{6}$ cm, notăm cu M mijlocul muchiei BC. Calculați:

a) $\mathcal{A}_l$; b) $\mathcal{V}$; c) $\sphericalangle(A'B, (ABC))$; d) $\mathcal{A}_{C'MA}$.

Soluție:



a) $\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot h = 3l \cdot h = 3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{6}\ \text{cm}^2 = 12\sqrt{12}\ \text{cm}^2 = 24\sqrt{3}\ \text{cm}^2$;

b) $\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = \dfrac{(2\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2\sqrt{6}\ \text{cm}^3 = \dfrac{(8\sqrt{3})\cdot(2\sqrt{6})}{4}\ \text{cm}^3 = 12\sqrt{2}\ \text{cm}^3$;

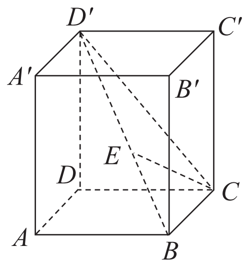
c) $\sphericalangle(A'B, (ABC)) = \sphericalangle A'BA$. În $\Delta A'BA$ cu $\sphericalangle A = 90°$, $\text{tg}(\sphericalangle B) = \dfrac{A'A}{AB} = \dfrac{2\sqrt{6}\ \text{cm}}{2\sqrt{2}\ \text{cm}} = \sqrt{3}$, deci $\sphericalangle A'BA = 60°$;

d) Arătăm că $\Delta C'MA$ este dreptunghic, aplicând teorema celor 3 perpendiculare: $C'C \perp (ABC)$, $CB \subset (ABC)$, $AM \subset (ABC)$ și $AM \perp BC$, deci $C'M \perp AM$, prin urmare $\mathcal{A}_{C'MA} = \dfrac{C'M \cdot AM}{2}$. Din $\Delta C'CM$ cu $\sphericalangle C = 90°$, aplicând teorema lui Pitagora, rezultă că $C'M^2 = C'C^2 + CM^2$, deci $C'M^2 = (2\sqrt{6})^2 + \sqrt{2}^2$, așadar $C'M^2 = 26$ cm și obținem $C'M = \sqrt{26}$ cm. $AM = \dfrac{l\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$ cm, prin urmare $\mathcal{A}_{C'MA} = \dfrac{\sqrt{26}\cdot\sqrt{6}}{2}\ \text{cm}^2 = \sqrt{39}\ \text{cm}^2$.

3. Se consideră prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$, cu muchia bazei de $3\sqrt{3}$ cm și înălțimea de $3\sqrt{6}$ cm. Calculați:

a) $\mathcal{A}_l$; b) $\mathcal{V}$; c) $\sphericalangle(BD', (A'AD))$; d) d$(C, BD')$.

Soluție:



a) $\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot h = 4 \cdot 3\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{6}\ \text{cm}^2 = 36\sqrt{18}\ \text{cm}^2 = 108\sqrt{2}\ \text{cm}^2$;

b) $\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h = l^2 \cdot h = 27 \cdot 3\sqrt{6}\ \text{cm}^3 = 81\sqrt{6}\ \text{cm}^3$;

c) Deoarece $BA \perp (A'AD)$, rezultă că $\sphericalangle(BD', (A'AD)) = \sphericalangle AD'B$. În $\Delta AD'B$ cu $\sphericalangle A = 90°$, $\text{tg}(\sphericalangle D') = \dfrac{AB}{D'A} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, prin urmare $\sphericalangle AD'B = 30°$;

d) Construim $CE \perp BD'$, $E \in BD'$. Aplicând teorema lui Pitagora în $\Delta CC'D'$ cu $\sphericalangle C' = 90°$, rezultă că $D'C^2 = C'C^2 + C'D'^2$, deci $D'C^2 = (3\sqrt{6})^2 + (3\sqrt{3})^2$ sau $D'C^2 = 54 + 27$, așadar $D'C^2 = 81$, prin urmare $D'C = \sqrt{81}$ cm și obținem $CD' = 9$ cm. Analog, din $\Delta BCD'$ cu $\sphericalangle C = 90°$, cu teorema lui Pitagora rezultă că $D'B^2 = D'C^2 + BC^2$, deci $D'B^2 = 9^2 + (3\sqrt{3})^2$ sau $D'B^2 = 81 + 27$, așadar $D'B^2 = 108$, prin urmare $D'B = BD' = 6\sqrt{3}$ cm. În $\Delta BCD'$ avem $CE = \dfrac{CB \cdot CD'}{BD'} = \dfrac{3\sqrt{3}\cdot 9}{6\sqrt{3}}$ cm $= 4{,}5$ cm.

EDITURA PARALELA 45

Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Se consideră prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$. Utilizând notațiile specifice prismei regulate, rezolvați următoarele probleme.

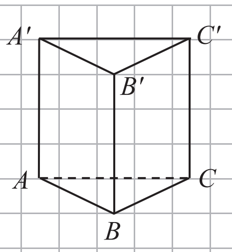
a) Dacă $l = 4$ cm și $h = 3\sqrt{3}$ cm, calculați $\mathcal{P}_b$, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_b$, $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$.

b) Dacă $l = 2\sqrt{3}$ cm și $h = 7$ cm, calculați $\mathcal{P}_b$, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_b$, $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$.

c) Dacă $l = 6$ cm și $\mathcal{A}_l = 90$ cm^2, calculați $\mathcal{P}_b$, h, $\mathcal{A}_b$ și $\mathcal{V}$.

d) Dacă $h = 8$ cm și $\mathcal{A}_l = 48$ cm^2, calculați $\mathcal{P}_b$, l, $\mathcal{A}_b$ și $\mathcal{V}$.

b)



d)

EDITURA PARALELA 45

Exerciții și probleme de dificultate redusă

4. Se consideră prisma triunghiulară regulată $DEFD'E'F'$. Utilizând notațiile specifice prismei regulate, rezolvați următoarele probleme.

a) Dacă $l = 2$ cm și $\mathcal{V} = 10\sqrt{3}$ cm^3, calculați $\mathcal{A}_b$, h, $\mathcal{P}_b$ și $\mathcal{A}_l$.

b) Dacă $h = 8$ cm și $\mathcal{V} = 32\sqrt{3}$ cm^3, calculați $\mathcal{A}_b$, l, $\mathcal{P}_b$ și $\mathcal{A}_l$.

c) Dacă $\mathcal{A}_l = 54\sqrt{3}$ cm^2 și $\mathcal{A}_t = 60\sqrt{3}$ cm^2, calculați $\mathcal{A}_b$, l, $\mathcal{P}_b$, h și $\mathcal{V}$.

d) Dacă $\mathcal{A}_l = 72\sqrt{3}$ cm^2 și $\mathcal{A}_t = 90\sqrt{3}$ cm^2, calculați $\mathcal{A}_b$, l, $\mathcal{P}_b$, h și $\mathcal{V}$.

5. Se consideră prisma patrulateră regulată $MNPQM'N'P'Q'$. Utilizând notațiile specifice prismei regulate, rezolvați următoarele probleme.

a) Dacă $l = 2$ cm și $\mathcal{V} = 40$ cm^3, calculați $\mathcal{A}_b$, h, $\mathcal{P}_b$, $\mathcal{A}_l$ și $\mathcal{A}_t$.

b) Dacă $h = 7$ cm și $\mathcal{V} = 63$ cm^3, calculați $\mathcal{A}_b$, l, $\mathcal{P}_b$, $\mathcal{A}_l$ și $\mathcal{A}_t$.

c) Dacă $\mathcal{A}_l = 120$ cm^2 și $\mathcal{A}_t = 170$ cm^2, calculați $\mathcal{A}_b$, l, $\mathcal{P}_b$, h și $\mathcal{V}$.

d) Dacă $\mathcal{A}_l = 192$ cm^2 și $\mathcal{A}_t = 228$ cm^2, calculați $\mathcal{A}_b$, l, $\mathcal{P}_b$, h și $\mathcal{V}$.

6. Se consideră prisma hexagonală regulată $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$. Utilizând notațiile specifice prismei regulate, rezolvați următoarele probleme.

a) Dacă $l = 4$ cm și $\mathcal{V} = 144\sqrt{3}$ cm^3, calculați $\mathcal{A}_b$, h, $\mathcal{P}_b$ și $\mathcal{A}_l$.

b) Dacă $h = 3$ cm și $\mathcal{V} = 108\sqrt{3}$ cm^3, calculați $\mathcal{A}_b$, l, $\mathcal{P}_b$ și $\mathcal{A}_l$.

c) Dacă $\mathcal{A}_l = 36\sqrt{3}$ cm^2 și $\mathcal{A}_t = 48\sqrt{3}$ cm^2, calculați $\mathcal{A}_b$, l, $\mathcal{P}_b$, h și $\mathcal{V}$.

d) Dacă $\mathcal{A}_l = 60\sqrt{3}$ cm^2 și $\mathcal{A}_t = 96\sqrt{3}$ cm^2, calculați $\mathcal{A}_b$, l, $\mathcal{P}_b$, h și $\mathcal{V}$.

7. Se consideră prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$. Dacă muchia bazei are lungimea de 4 cm și înălțimea are lungimea de 3 cm, calculați:

a) $\mathcal{A}_l$; b) $\mathcal{A}_t$; c) $\mathcal{V}$; d) $\sphericalangle(AB, B'C')$.

8. Se consideră prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$. Dacă muchia bazei are lungimea de 3 cm și înălțimea are lungimea de $3\sqrt{3}$ cm, calculați:

a) $\mathcal{A}_l$; b) $\mathcal{A}_t$; c) $\mathcal{V}$; d) $\sphericalangle(BC', AD)$.

9. Prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are muchia bazei de 2 cm și muchia laterală de $2\sqrt{3}$ cm. Calculați:

a) $\mathcal{A}_l$; b) $\mathcal{A}_t$; c) $\mathcal{V}$; d) (B', BC').

10. Prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are muchia bazei de 6 cm și muchia laterală de $6\sqrt{2}$ cm. Calculați:

a) $\mathcal{A}_l$; b) $\mathcal{A}_t$; c) $\mathcal{V}$; d) $\mathcal{A}_{ABC'D'}$.

Exerciții și probleme de dificultate medie

11. Prisma triunghiulară regulată $DEFD'E'F'$ are muchia bazei de 2 cm și volumul de 6 cm^3. Calculați:

a) h; b) $\mathcal{A}_t$; c) d$(E', D'E)$; d) $\sphericalangle(D'D, (EF'))$.

EDITURA PARALELA 45

12. În prisma patrulateră regulată $DEFGD'E'F'G'$ cu aria bazei de 16 cm^2 și volumul de $64\sqrt{2}$ cm^3, notăm cu O centrul bazei $D'E'F'G'$. Calculați:

a) h; b) $\mathcal{A}_l$; c) $\sphericalangle(D'D, EF)$; d) $d(O, D'F)$.

13. Prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are muchia bazei de 4 cm și aria laterală de $24\sqrt{5}$ cm^2. Calculați:

a) h; b) $\mathcal{V}$; c) $\mathcal{P}_{A'BC}$; d) $\sphericalangle((A'AB), (A'AC))$.

14. Prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are muchia bazei de 4 cm și volumul de $48\sqrt{3}$ cm^3. Calculați:

a) h; b) $\mathcal{A}_l$; c) $d(B', (A'AC))$; d) $\sphericalangle((A'AD), (ABC))$.

15. Prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are înălțimea de $2\sqrt{3}$ cm și volumul de 24 cm^3. Calculați:

a) $\mathcal{A}_l$; b) $\mathcal{A}_t$; c) $d(A, (BA'C))$; d) $\sphericalangle((A'BC), (ABC))$.

16. Prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are aria bazei de 9 cm^2 și aria laterală de $36\sqrt{2}$ cm^2. Calculați:

a) h; b) $\mathcal{V}$; c) $d(D', AB)$; d) $\sphericalangle(A'C, (A'B'C')]$.

17. Prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are aria laterală de $24\sqrt{3}$ cm^2 și aria totală de $30\sqrt{3}$ cm^2. Calculați:

a) l; b) $\mathcal{V}$; c) $\mathcal{A}_{A'BC}$; d) $\sphericalangle(AB, B'C')$.

18. Prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are aria laterală de 72 cm^2 și aria totală de 96 cm^2. Calculați:

a) l; b) $\mathcal{V}$; c) $d(B', AC)$; d) $\sphericalangle(AC, B'D')$.

19. În prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, care are înălțimea de $4\sqrt{3}$ cm și aria laterală de $48\sqrt{3}$ cm^2, notăm cu M mijlocul muchiei BC. Calculați:

a) $\mathcal{A}_t$; b) $\mathcal{V}$; c) $\sphericalangle(A'B, (ABC))$; d) $d(B', AM)$.

20. Prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are înălțimea de $3\sqrt{2}$ cm și volumul egal cu $96\sqrt{2}$ cm^3. Calculați:

a) l; b) $\mathcal{A}_t$; c) $d(B', (ABC'))$; d) $\sphericalangle((B'BD), (A'AD))$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

21. În prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu muchia bazei de 6 cm și înălțimea de $6\sqrt{3}$ cm, notăm cu M mijlocul muchiei BB', iar $AB' \cap A'M = \{E\}$ și $CB' \cap C'M = \{F\}$.

a) Calculați $\mathcal{A}_t$. b) Calculați $\mathcal{V}$.

c) Arătați că $EF \parallel (A'AC)$. d) Arătați că $\mathcal{A}_{AEFC} < 32$ cm^2.

22. Prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are muchia bazei de $6\sqrt{2}$ cm și înălțimea de 12 cm. Dacă $AC \cap BD = \{O\}$, aflați:

a) $\mathcal{A}_t$; b) $\mathcal{V}$; c) $d(O, B'C)$; d) $\sphericalangle(D'B, (A'AD))$.

EDITURA PARALELA 45

34. În prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$, care are muchia bazei de $2\sqrt{6}$ cm și aria laterală de 72 cm^2, notăm cu M mijlocul muchiei AA'.

a) Calculați h; b) Calculați $\mathcal{V}$;

c) Arătați că $(MBC') \perp (MB'C)$; d) Determinați $\sphericalangle((B'MC), (ABC))$.

35. În prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$, cu muchia bazei de $6\sqrt{2}$ cm și înălțimea de $3\sqrt{3}$ cm, notăm cu M mijlocul muchiei $A'D'$, iar $MA \cap A'D = \{E\}$ și $MC \cap$ $\cap D'B = \{F\}$.

a) Calculați $\mathcal{A}_l$. b) Calculați $\mathcal{V}$;

c) Arătați că $EF \parallel AC$. d) Calculați $\mathcal{A}_{MEF}$.

Exerciții și probleme pentru olimpiada de matematică

36. În prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ este înscrisă prisma triunghiulară regulată $AEFA'E'F'$, astfel încât $E \in BC$, $F \in CD$, $E' \in B'C'$ și $F' \in C'D'$. Dacă notăm cu $\mathcal{V}$ și $\mathcal{V}_1$ volumele celor două prisme, arătați că $\mathcal{V}_1 < \frac{1}{2}\mathcal{V}$.

37. Se consideră prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ și notăm cu M mijlocul muchiei AA'. Știind că $\sphericalangle BMC' = 108°$ și $BC' = 3(1+\sqrt{5})$ cm, calculați aria laterală a prismei.

Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** O prismă patrulateră regulată are muchia bazei de 2 cm și muchia laterală de 3 cm. Calculați:

a) $\mathcal{A}_l$; b) $\mathcal{A}_t$; c) $\mathcal{V}$.

(3p) **2.** Prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are muchia bazei de $2\sqrt{2}$ cm și volumul egal cu $32\sqrt{2}$ cm^3. Calculați:

a) $\mathcal{A}_l$; b) $\mathcal{A}_t$; c) $d(C, B'D)$.

(3p) **3.** Prisma triunghiulară regulată $DEFD'E'F'$ are aria laterală egală cu $24\sqrt{3}$ cm^2 și înălțimea de 4 cm. Calculați:

a) $\mathcal{A}_t$; b) $\mathcal{V}$; c) $d(E', (D'EF))$.

Lecția 7. Paralelipipedul dreptunghic

Citesc și rețin

Notații utilizate: L – lungimea paralelipipedului dreptunghic, l – lățimea paralelipipedului dreptunghic, h – înălțimea paralelipipedului dreptunghic, d – lungimea diagonalei paralelipipedului dreptunghic, $\mathcal{A}_t$ – aria totală a paralelipipedului dreptunghic, $\mathcal{V}$ – volumul paralelipipedului dreptunghic.

$$d = \sqrt{L^2 + l^2 + h^2}, \qquad \mathcal{A}_t = 2(L \cdot l + l \cdot h + h \cdot L), \qquad \mathcal{V} = L \cdot l \cdot h.$$

EDITURA PARALELA 45

Exerciții și probleme pentru olimpiada de matematică

26. Notăm cu O centrul bazei $ABCD$ a prismei patrulatere regulate $ABCDA'B'C'D'$ și considerăm punctul E situat pe muchia CC' astfel încât $AB = 2C'E$. Știind că $\sphericalangle A'OE = 90°$ și că aria totală și volumul prismei se exprimă prin același număr, calculați lungimea diagonalei prismei.

27. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ de volum $\mathcal{V}$ și punctele E și F situate pe muchiile BC, respectiv CD, astfel încât $EF \parallel BD$. Construim prisma dreaptă $AEFA'E'F'$ ($E' \in B'C'$ și $F' \in C'D'$) de volum $\mathcal{V}_1$. Arătați că $\mathcal{V}_1 \leq \frac{1}{2}\mathcal{V}$.

Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Un cub are lungimea muchiei egală cu $2\sqrt{3}$ cm. Calculați:
a) d; b) $\mathcal{A}_t$; c) $\mathcal{V}$.

(3p) **2.** În cubul $ABCDA'B'C'D'$ notăm cu M mijlocul muchiei $A'B'$. Știind că $\mathcal{A}_t = 96$ cm^2, calculați:
a) $\mathcal{V}$; b) $\sphericalangle(AC, D'C')$; c) $\mathcal{A}_{MAC}$.

(3p) **3.** Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ și notăm cu O centrul feței $A'B'C'D'$. Știind că $\mathcal{V} = 24\sqrt{3}$ cm^3, calculați:
a) $\mathcal{A}_t$; b) $\sphericalangle(AD', BO)$; c) d(C', ($AD'C$)).

Teste de evaluare sumativă

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea I – Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(1p) **1.** Volumul cubului cu muchia de 2 cm este egal cu:
A. 8 cm^3; B. 12 cm^3; C. 18 cm^3; D. 6 cm^3.

(1p) **2.** Aria laterală a prismei hexagonale regulate cu $l = 2$ cm și $h = 4$ cm este egală cu:
A. 36 cm^2; B. 48 cm^2; C. 54 cm^2; D. 60 cm^2.

(1p) **3.** Înălțimea paralelipipedului dreptunghic cu $L = 4$ cm, $l = 2$ cm și $\mathcal{V} = 24$ cm^3 este egală cu:
A. 5 cm; B. 6 cm; C. 8 cm; D. 3 cm.

(1p) **4.** O prismă triunghiulară regulată are muchia bazei de 3 cm și diagonala unei fețe laterale de 6 cm. Aria laterală a prismei este egală cu:
A. 24 cm^2; B. $18\sqrt{6}$ cm^2; C. $27\sqrt{3}$ cm^2; D. 30 cm^2.

EDITURA PARALELA 45

(1p) **5.** O prismă patrulateră regulată are $\mathcal{A}_l = 24$ cm^2 și $\mathcal{A}_t = 60$ cm^2. Muchia bazei prismei are lungimea egală cu:

A. 4 cm; B. $2\sqrt{3}$ cm; C. $3\sqrt{2}$ cm; D. 6 cm.

Partea a II-a – La următoarele probleme se cer rezolvările complete.

(1p) **1.** Aria și volumul cubului $ABCDA'B'C'D'$ se exprimă prin același număr. Calculați distanța de la punctul A' la diagonala BD'.

(1p) **2.** Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are l, L și h exprimate prin trei numere naturale consecutive și $\mathcal{A}_t = 94$ cm^2. Aflați $\sphericalangle(B'D, (ABC))$.

(1p) **3.** Prisma triunghiulară regulată $DEFD'E'F'$ are $h = 4\sqrt{2}$ cm, $\sphericalangle(DF, EF') = 75°$ și $\mathcal{A}_{ED'F'} = 12$ cm^2. Calculați aria laterală a prismei.

(1p) **4.** Prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are înălțimea de 6 cm și volumul egal cu 108 cm^3.

a) Calculați d$(B', (ABC'))$. b) Calculați $\sphericalangle(BD', (A'AB))$.

Testul 2

Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea I – Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(1p) **1.** Volumul paralelipipedului dreptunghic cu $L = 2$ cm, $l = 1$ cm și $h = 3$ cm este egal cu:

A. 6 cm^3; B. $4\sqrt{6}$ cm^3; C. $6\sqrt{2}$ cm^3; D. 8 cm^3.

(1p) **2.** Diagonala cubului cu aria de 54 cm^2 are lungimea egală cu:

A. 3 cm; B. $3\sqrt{3}$ cm; C. $4\sqrt{2}$ cm; D. 4 cm.

(1p) **3.** Aria totală a prismei hexagonale regulate cu $l = 2$ cm și $h = 2\sqrt{3}$ cm este egală cu:

A. $60\sqrt{2}$ cm^2; B. 36 cm^2; C. 48 cm^2; D. $36\sqrt{3}$ cm^2.

(1p) **4.** Volumul prismei patrulatere regulate cu $h = 5$ cm și $\mathcal{A}_l = 80$ cm^2 este egal cu:

A. $24\sqrt{5}$ cm^3; B. 60 cm^3; C. 80 cm^3; D. $32\sqrt{5}$ cm^3.

(1p) **5.** Aria laterală a prismei triunghiulare regulate cu $\mathcal{A}_b = \sqrt{3}$ cm^2 și $h = 4$ cm este egală:

A. $12\sqrt{3}$ cm^2; B. 18 cm^2; C. 24 cm^2; D. $18\sqrt{3}$ cm^2.

Partea a II-a – La următoarele probleme se cer rezolvările complete.

(1p) **1.** Se consideră prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$. Știind că $l = 2\sqrt{3}$ cm și că triunghiul $BA'C'$ este echilateral, calculați volumul prismei.

(1p) **2.** Calculați aria paralelipipedului dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, știind că $AC = 2\sqrt{5}$ cm, $AB' = 2\sqrt{10}$ cm și $AD' = 2\sqrt{13}$ cm.

EDITURA PARALELA 45

II.2. Corpuri rotunde

Definiție: Un corp geometric care este mărginit parțial sau total de suprafețe neplane (curbe) se numește **corp rotund**.

Corpurile rotunde studiate în acest capitol sunt: cilindrul circular drept, conul circular drept, trunchiul de con circular drept și sfera.

Definiții:

Aria laterală a unui corp rotund, notată $\mathcal{A}_l$, reprezintă aria suprafeței laterale a acestuia.

Aria totală a unui corp rotund, notată $\mathcal{A}_t$, reprezintă suma dintre aria laterală a corpului rotund și aria bazei (bazelor).

Volumul unui corp rotund, notat $\mathcal{V}$, reprezintă spațiul (geometric) pe care îl ocupă acesta.

Lecția 11. Cilindrul circular drept

Citesc și rețin

Notații utilizate: R – raza cilindrului circular drept, G – lungimea generatoarei cilindrului circular drept, h – lungimea înălțimii cilindrului circular drept, $\mathcal{A}_b$ – aria bazei cilindrului circular drept, $\mathcal{A}_l$ – aria laterală a cilindrului circular drept, $\mathcal{A}_t$ – aria totală a cilindrului circular drept, $\mathcal{V}$ – volumul cilindrului circular drept.

$$\mathcal{A}_l = 2\pi RG, \qquad \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b = 2\pi R(G+R),$$
$$\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h = \pi R^2 h.$$

Cum se aplică?

1. Se consideră un cilindru circular drept cu $R = 4$ cm și $G = 5$ cm. Aflați $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$.

Soluție:

$\mathcal{A}_l = 2\pi RG = 2\pi \cdot 4 \cdot 5\ \text{cm}^2 = 40\pi\ \text{cm}^2$; $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b = 40\pi\ \text{cm}^2 + 2\pi R^2 = 40\pi\ \text{cm}^2 + 32\pi\ \text{cm}^2 = 72\pi\ \text{cm}^2$; $\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h = 16\pi \cdot 5\ \text{cm}^3 = 80\pi\ \text{cm}^3$.

2. Un cilindru circular drept are aria laterală egală cu $30\pi\ \text{cm}^2$ și aria totală egală cu $48\pi\ \text{cm}^2$. Calculați:

a) R; b) G.

Soluție:

a) $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b$, deci $48\pi\ \text{cm}^2 = 30\pi\ \text{cm}^2 + 2\mathcal{A}_b$, de unde rezultă că $2\mathcal{A}_b = 18\pi\ \text{cm}^2$ sau $\mathcal{A}_b = 9\pi\ \text{cm}^2$, prin urmare $\pi R^2 = 9\pi$, deci $R^2 = 9\ \text{cm}^2$ și obținem $R = 3$ cm;

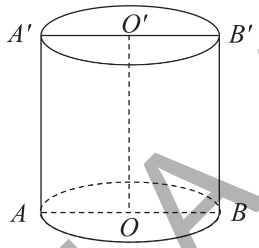
b) $\mathcal{A}_l = 30\pi\ \text{cm}^2$, deci $2\pi RG = 30\pi\ \text{cm}^2$ sau $6\pi G = 30\pi$ cm, de unde obținem $G = 5$ cm.

EDITURA PARALELA 45

3. Un cilindru circular drept are aria laterală egală cu 24π cm^2 și volumul egal cu $24\sqrt{2}\,\pi$ cm^3. Calculați:

a) R; b) G; c) $\mathcal{A}_t$.

Soluție:



a) $\mathcal{A}_l = 24\pi$ cm^2 sau $2\pi RG = 24\pi$ cm^2, deci $RG = 12$ cm^2. $\mathcal{V} = 24\sqrt{2}\,\pi$ cm^3 sau $R \cdot RG = 24\sqrt{2}$ cm^3, deci $12R = 24\sqrt{2}$ cm, de unde obținem $R = 2\sqrt{2}$ cm;

b) $RG = 12$ cm^2 sau $2\sqrt{2} \cdot G = 12$ cm, de unde rezultă că $G = 3\sqrt{2}$ cm;

c) $\mathcal{A}_t = 2\pi R(G + R) = 2\pi \cdot 2\sqrt{2}(3\sqrt{2}+2\sqrt{2})$ cm$^2 = 2\pi \cdot 2\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}$ cm$^2 = 40\pi$ cm^2.

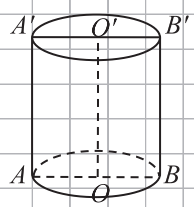
Știu să rezolv

Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Calculați $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$ unui cilindru circular drept, în următoarele cazuri:

a) $R = 4$ cm și $G = 7$ cm; b) $R = 6$ cm și $G = 8$ cm.

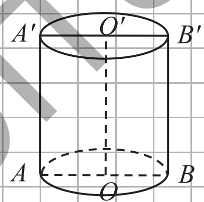
b)



2. Calculați R, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$ unui cilindru circular drept, știind că:

a) $G = 5$ cm și $\mathcal{A}_b = 16\pi$ cm^2; b) $G = 6$ cm și $\mathcal{A}_b = 25\pi$ cm^2.

b)



EDITURA PARALELA 45

Exerciții și probleme de dificultate redusă

3. Se consideră un cilindru circular drept. Știind că secțiunea axială a cilindrului este un pătrat cu:

a) perimetrul de 24 cm, calculați G, R, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$;

b) perimetrul de 32 cm, calculați G, R, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$.

4. Se consideră un cilindru circular drept. Știind că:

a) $G = 5$ cm și $\mathcal{A}_l = 30\pi$ cm^2, calculați R, $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$;

b) $R = 2$ cm și $\mathcal{A}_l = 52\pi$ cm^2, calculați G, $\mathcal{A}_t$ și $\mathcal{V}$.

5. Se consideră un cilindru circular drept. Știind că:

a) $R = 3$ cm și $\mathcal{V} = 63\pi$ cm^3, calculați G, $\mathcal{A}_l$ și $\mathcal{A}_t$;

b) $G = 5$ cm și $\mathcal{V} = 80\pi$ cm^3, calculați R, $\mathcal{A}_l$ și $\mathcal{A}_t$.

Exerciții și probleme de dificultate medie

6. Calculați raza, generatoarea și volumul unui cilindru circular drept, știind că:

a) $\mathcal{A}_l = 42\pi$ cm^2 și $\mathcal{A}_t = 60\pi$ cm^2; b) $\mathcal{A}_l = 40\pi$ cm^2 și $\mathcal{A}_t = 72\pi$ cm^2.

7. Un cilindru circular drept are raza și generatoarea direct proporționale cu numerele 2, respectiv 3. Dacă volumul cilindrului este egal cu 96π cm^3, calculați:

a) R; b) G; c) $\mathcal{A}_l$; d) $\mathcal{A}_t$.

8. Aria secțiunii axiale a unui cilindru circular drept este egală cu 72 dm^2. Știind că $R = 25\%G$, calculați:

a) G; b) $\mathcal{A}_l$; c) $\mathcal{A}_t$; d) $\mathcal{V}$.

9. Secțiunea axială a unui cilindru circular drept este un pătrat cu aria de 48 dm^2. Calculați:

a) R; b) $\mathcal{A}_l$; c) $\mathcal{A}_t$; d) $\mathcal{V}$.

10. Raza și generatoarea unui cilindru circular drept sunt invers proporționale cu numerele 0,5, respectiv 0,(3). Dacă aria laterală a cilindrului este egală cu 108π cm^2, aflați:

a) R; b) G; c) $\mathcal{A}_t$; d) $\mathcal{V}$.

11. Un cilindru circular drept are raza și generatoarea direct proporționale cu numerele 2 și 5. Știind că cilindrul are aria totală egală cu 112π cm^2, calculați:

a) R; b) G; c) $\mathcal{A}_l$; d) $\mathcal{V}$.

12. Un cilindru circular drept are aria laterală egală cu 30π cm^2 și volumul egal cu 45π cm^3. Calculați:

a) R; b) G; c) $\mathcal{A}_b$; d) $\mathcal{A}_t$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

13. Valoarea raportului dintre aria laterală și aria totală ale unui cilindru circular drept este egală cu 0,(6), iar volumul cilindrului este egal cu 250π cm^3. Calculați perimetrul secțiunii axiale.

EDITURA PARALELA 45

14. Un cilindru circular drept cu generatoarea de 6 cm are aria totală egală cu 54π cm^2. Calculați volumul cilindrului circular drept.

15. Un cilindru circular drept are aria totală egală cu 110π cm^2. Știind că raza și generatoarea sunt reprezentate de două numere naturale consecutive, calculați volumul cilindrului.

Exerciții și probleme pentru olimpiada de matematică

16. Un cilindru circular drept are perimetrul secțiunii axiale egal cu 40 cm. Arătați că aria laterală a cilindrului circular drept este mai mică sau egală cu 100π cm^2.

17. Un cilindru circular drept are aria totală egală cu 192π cm^2 și volumul egal cu 360π cm^3. Determinați raza și generatoarea cilindrului circular drept, știind că sunt numere naturale.

Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Un cilindru circular drept are raza de 4 cm și generatoarea de 7 cm. Calculați:
a) $\mathcal{A}_l$; b) $\mathcal{A}_t$; c) $\mathcal{V}$.

(3p) **2.** Valoarea raportului dintre raza și generatoarea unui cilindru circular drept este egală cu 0,8(3). Știind că cilindrul are volumul egal cu 1200π cm^3, calculați:
a) R; b) G; c) $\mathcal{A}_l$.

(3p) **3.** Un cilindru circular drept cu aria laterală de 24π cm^2 are raza și generatoarea exprimate prin două numere naturale consecutive. Calculați:
a) R; b) $\mathcal{A}_t$; c) $\mathcal{V}$.

Lecția 12. Conul circular drept

Citesc și rețin

Notații utilizate: R – raza bazei conului circular drept, G – lungimea generatoarei conului circular drept, h – lungimea înălțimii conului circular drept, $\mathcal{A}_b$ – aria bazei conului circular drept, u – măsura unghiului la centru corespunzător sectorului de disc obținut prin desfășurarea în plan a conului circular drept, $\mathcal{A}_l$ – aria laterală a conului circular drept, $\mathcal{A}_t$ – aria totală a conului circular drept, $\mathcal{V}$ – volumul conului circular drept.

$$\mathcal{A}_l = \pi RG, \qquad \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b = \pi R(G+R),$$

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_b \cdot h}{3} = \frac{\pi R^2 h}{3}.$$

EDITURA PARALELA 45

(3p) **2.** Un cilindru circular drept cu raza de 4 cm și generatoarea de $4\sqrt{5}$ cm este înscris în sfera $\mathcal{S}(O, R)$. Calculați:

a) R; b) $\mathcal{A}_s$; c) $\mathcal{V}_s$.

(3p) **3.** În sfera $\mathcal{S}(O, R)$ este înscris un con circular drept de rază r și înălțime h, $h > R$. Știind că $R = 6$ cm și $r = 2\sqrt{5}$ cm, calculați:

a) $\mathcal{V}_s$; b) h; c) $\mathcal{A}_l$.

Teste de evaluare sumativă

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea I – Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(1p) **1.** Aria laterală a cilindrului circular drept cu $R = 2$ cm și $G = 3$ cm este egală cu:

A. 12π cm^2; B. 15π cm^2; C. 16π cm^2; D. 18π cm^2.

(1p) **2.** Înălțimea conului circular drept cu $R = 3$ cm și $\mathcal{V} = 30\pi$ cm^3 este egală cu:

A. 6 cm; B. 10 cm; C. 12 cm; D. 9 cm.

(1p) **3.** Aria totală a trunchiului de con circular drept cu $R = 6$ cm, $r = 2$ cm și $g = 7$ cm este egală cu:

A. 38π cm^2; B. 42π cm^2; C. 96π cm^2; D. 60π cm^2.

(1p) **4.** Volumul sferei cu aria de 48π cm^2 este egal cu:

A. $24\sqrt{3}\pi$ cm^3; B. $36\sqrt{3}\pi$ cm^3; C. $48\sqrt{3}\pi$ cm^3; D. $32\sqrt{3}\pi$ cm^3.

(1p) **5.** Raza bazei unui con circular drept care are $\mathcal{A}_l = 15\pi$ cm^2 și $\mathcal{A}_t = 24\pi$ cm^2 este egală cu:

A. 3 cm; B. 4 cm; C. 5 cm; D. 6 cm.

Partea a II-a – La următoarele probleme se cer rezolvările complete.

(1p) **1.** Prin desfășurarea în plan a suprafeței laterale a unui con circular drept cu $G = 15$ cm se obține un sector de disc corespunzător unui unghi la centru cu măsura de 288°. Calculați volumul conului circular drept.

(1p) **2.** Un cilindru circular drept are generatoarea de 5 cm și aria totală egală cu 28π cm^2. Calculați aria laterală a cilindrului circular drept.

(1p) **3.** Un cilindru circular drept și o sferă au razele egale și aria totală a cilindrului este egală cu aria sferei. Arătați că $\mathcal{V}_s = \frac{4}{3}\mathcal{V}_c$.

(1p) **4.** Un trunchi de con circular drept are raza bazei mici de 1 cm, înălțimea de $3\sqrt{2}$ cm și volumul egal cu $21\sqrt{2}$ cm^3.

a) Calculați h. b) Calculați $\mathcal{A}_l$.

EDITURA PARALELA 45

Teste de evaluare finală

Testul 1

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Partea I. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

(5p) **1.** Suma numerelor întregi din intervalul (–5; 1] este egală cu:
A. –14; B. –8; C. –9; D. –13.

(5p) **2.** Rezultatul intersecției $\left[-3\sqrt{3};7\right)\cap\left(-5;5\sqrt{2}\right]$ este intervalul de numere reale:
A. $\left[-3\sqrt{3};-5\right)$; B. (–5; 7); C. [–5; 7]; D. $\left(-5;5\sqrt{2}\right]$.

(5p) **3.** Rezultatul calculului $-4x^4+(-2x)(-3x^3)$ este egal cu:
A. $2x^4$; B. $-6x^3$; C. $-8x^4$; D. $3x^2$.

(5p) **4.** Scriind sub forma cea mai simplă rezultatul calculului $\frac{x-1}{6x^4}:\frac{x-1}{3x^3}$, obținem:
A. $\frac{1}{2x}$; B. $\frac{x-1}{3x}$; C. $\frac{4x}{x-1}$; D. $\frac{3x}{2}$.

(5p) **5.** Numărul de soluții reale ale ecuației $x^2-3x+2=0$ este egal cu:
A. 0; B. 1; C. 2; D. 3.

(5p) **6.** Graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3x+1$ intersectează axa Oy a sistemului de axe ortogonale xOy în punctul:
A. $M(0; 1)$; B. $N(0; 3)$; C. $P(1; 0)$; D. $Q(3; 0)$.

(5p) **7.** Aria laterală a cilindrului circular drept cu $R=2$ cm și $G=5$ cm este egală cu:
A. 15π cm^2; B. 30π cm^2; C. 25π cm^2; D. 20π cm^2.

(5p) **8.** Volumul paralelipipedului dreptunghic cu $L=3$ dm, $l=1$ dm și $h=4$ dm este egal cu:
A. 14 dm^3; B. 16 dm^3; C. 12 dm^3; D. 18 dm^3.

(5p) **9.** Suma lungimilor muchiilor tetraedrului regulat cu aria de $4\sqrt{3}$ dm^2 este egală cu:
A. 16 dm; B. 18 dm; C. 15 dm; D. 12 dm.

Partea a II-a. La următoarele probleme scrieți rezolvările complete.

1. Se consideră expresia $E(x)=(x^2+x)(x^2+x-1)-2$, unde $x\in\mathbb{R}$.

(8p) a) Arătați că $E(x)=(x-1)(x+2)(x^2+x+1)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

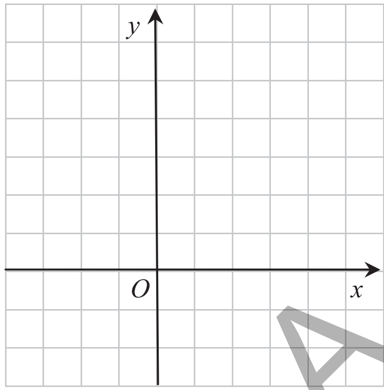
(7p) b) Arătați că pentru numerele naturale $n=3k+1$, $k\in\mathbb{N}$, expresia $E(n)$ se divide cu 27.

EDITURA PARALELA 45

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 2$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = -x + 5$.

(7p) a) Reprezentați în sistemul de axe ortogonale xOy din figura alăturată punctul în care se intersectează graficele funcțiilor f și g.

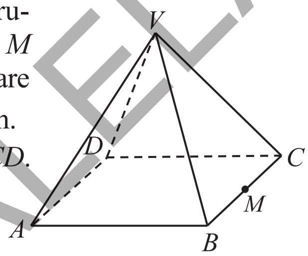
(8p) b) Calculați aria triunghiului determinat de axa Ox cu graficele funcțiilor f și g.



3. În figura alăturată este reprezentată piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu vârful în V, iar punctul M este mijlocul muchiei BC. Se știe că piramida are muchia bazei de $4\sqrt{5}$ cm și muchia laterală de 10 cm.

(7p) a) Calculați aria totală a piramidei patrulatere $VABCD$.

(8p) b) Calculați distanța de la punctul A la dreapta VM.



Testul 2

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Partea I. Încercuiți litera corespunzătoare răspunsului corect.

(5p) 1. Cardinalul mulțimii $\{a \in \mathbb{Z} \mid a \in (-5; 2]\}$ este egal cu:

A. 4; B. 5; C. 6; D. 7.

(5p) 2. Rezultatul intersecției $\left(-\infty;\sqrt{6}\right)\cap\left[\sqrt{6};+\infty\right)$ este egal cu:

A. $\left[-\sqrt{6};\sqrt{6}\right)$; B. $\left\{\sqrt{6}\right\}$; C. $\varnothing$; D. $(-\infty, +\infty)$.

(5p) 3. Forma canonică a expresiei algebrice $x^3 + (x^2 - 1)(x^2 + 1)$ este egală cu:

A. $x^3 + 2x^2$; B. $x^4 + x^3 - 1$; C. $x^3 + x^2 + 1$; D. $x^4 - 2x^3$.

(5p) 4. Mulțimea soluțiilor ecuației $x^2 - x = 0$, unde $x \in \mathbb{R}$, este:

A. $\{0, 2\}$; B. $\{-1, 3\}$; C. $\{-2, 1\}$; D. $\{0, 1\}$.

(5p) 5. Scriind sub forma cea mai simplă rezultatul calculului $\frac{x^2-1}{4x^3}\cdot\frac{2x}{x-1}$, obținem:

A. $\frac{x-1}{2x}$; B. $\frac{x+1}{2x^2}$; C. $\frac{x-1}{4x^2}$; D. $\frac{x+1}{4x}$.

(5p) 6. Se consideră funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x) = x^2$. Media aritmetică a numerelor $h(1)$ și $h(-3)$ este egală cu:

A. 7; B. 8; C. 5; D. 6.

(5p) 7. O sferă are aria egală cu 20π cm^2. Raza sferei este egală cu:

A. 4 cm; B. $\sqrt{6}$ cm; C. $\sqrt{5}$ cm; D. 3 cm.

(5p) 8. Volumul piramidei patrulatere regulate cu $l = 2$ dm și $h = 3$ dm este egal cu:

A. 9 dm^3; B. 8 dm^3; C. 6 dm^3; D. 4 dm^3.

EDITURA PARALELA 45

Modele de teste pentru Evaluarea Națională

Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.

Testul 1

Subiectul I. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

(5p) **1.** Cel mai mare număr natural de forma $\overline{4x4}$ divizibil cu 3 este egal cu:
a) 464; b) 474; c) 484; d) 494.

(5p) **2.** Se consideră mulțimile $E = \{a, b, c, d\}$ și $F = \{d, p, t\}$. Cardinalul mulțimii $E \cup F$ este egal cu:
a) 4; b) 5; c) 6; d) 7.

(5p) **3.** Prețul unui abonament telefonic după o ieftinire cu 4% este de 48 lei. Prețul abonamentului telefonic înainte de ieftinire a fost de:
a) 50 lei; b) 52 lei; c) 60 lei; d) 72 lei.

(5p) **4.** Se consideră numărul $x = \sqrt{5^{11} - 5^{10}}$. Numărul x este egal cu:
a) $5^5\sqrt{2}$; b) $5 \cdot 2^8$; c) $2 \cdot 5^5$; d) $5^4\sqrt{5}$.

(5p) **5.** Patru elevi, Ion, Vali, Gabi și Ina, calculează media geometrică a numerelor reale $a = \sqrt{13} - 2$ și $b = \sqrt{13} + 2$. Răspunsurile date de cei patru elevi sunt prezentate în tabelul alăturat.

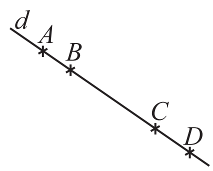
Ion	Vali	Gabi	Ina
$2\sqrt{13}$	3	5	$4\sqrt{13}$

Rezultatul corect a fost obținut de către:
a) Ion; b) Vali; c) Gabi; d) Ina.

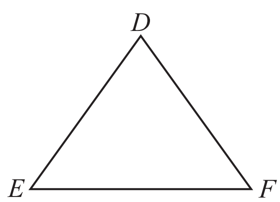
(5p) **6.** Ioana afirmă că „singurul număr natural de două cifre care este atât pătrat perfect cât și cub perfect este 64”. Afirmația Ioanei este:
a) adevărată; b) falsă.

Subiectul al II-lea. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

(5p) **1.** În figura alăturată, pe dreapta d sunt reprezentate punctele coliniare A, B, C și D. Numărul segmentelor determinate de cele patru puncte este egal cu:
a) 3; b) 4;
c) 5; d) 6.



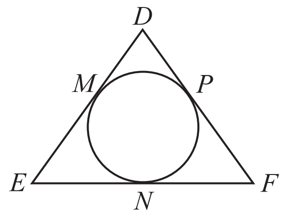
(5p) **2.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul echilateral DEF. Dacă semiperimetrul triunghiului DEF este egal cu 15 cm, atunci lungimea laturii EF este egală cu:
a) 5 cm; b) 10 cm;
c) 15 cm; d) 20 cm.



EDITURA PARALELA 45

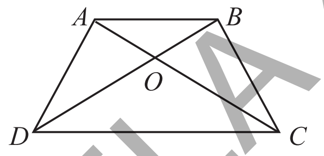
(5p) **3.** În figura alăturată, M, N și P sunt punctele de tangență ale cercului înscris în triunghiul DEF cu laturile acestuia. Dacă $DM = 3$ cm, $EN = 4$ cm și $FP = 5$ cm, atunci lungimile laturilor DE, EF și FD sunt egale cu:

a) 7 cm, 9 cm, 8 cm; b) 6 cm, 8 cm, 9 cm;
c) 7 cm, 8 cm, 10 cm; d) 8 cm, 9 cm, 10 cm.



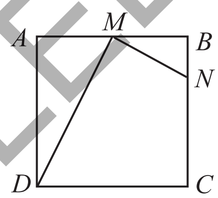
(5p) **4.** În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ și $AC \cap BD = \{O\}$. Dacă $\mathscr{P}_{ABD} = 35$ cm și $\mathscr{P}_{BCO} = 28$ cm, atunci lungimea bazei mici AB este egală cu:

a) 9 cm; b) 6 cm;
c) 8 cm; d) 7 cm.



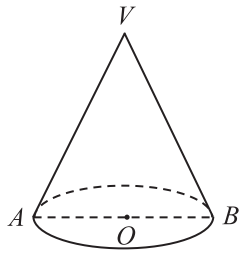
(5p) **5.** Pătratul $ABCD$ din figura alăturată reprezintă schematic o placă de gresie care s-a spart în trei bucăți. Dacă latura pătratului este de 4 dm, $AM \equiv MB$ și $\Delta DAM \sim \Delta MBN$, atunci aria patrulaterului $MNCD$ este egală cu:

a) 14 dm^2; b) 10 dm^2;
c) 11 dm^2; d) 12 dm^2.



(5p) **6.** În figura alăturată este reprezentat un con circular drept. Dacă secțiunea axială VAB a conului are perimetrul de 70 cm, iar raza și generatoarea sunt direct proporționale cu numerele 2 și 5, atunci aria laterală a conului este egală cu:

a) 100π cm^2; b) 250π cm^2;
c) 200π cm^2; d) 125π cm^2.



Subiectul al III-lea. Scrieți rezolvările complete.

1. Ștefan este fiul lui Ion. În urmă cu trei ani, vârsta lui Ion era de 7 ori mai mare decât vârsta lui Ștefan, iar peste un an vârsta lui Ștefan va fi de 4 ori mai mică decât vârsta lui Ion.

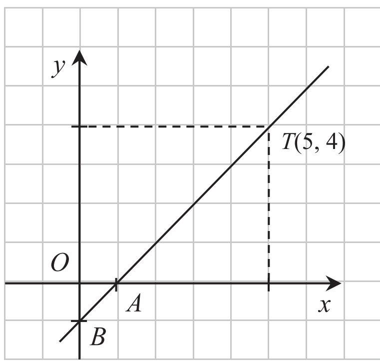
(3p) a) Calculează vârsta lui Ștefan și vârsta lui Ion.

(2p) b) Peste câți ani vârsta lui Ion va fi de 3 ori mai mare decât vârsta lui Ștefan?

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - 1$.

(2p) a) Dacă A și B sunt punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox, respectiv Oy, ale sistemului de axe ortogonale xOy, determină măsurile unghiurilor triunghiului OAB.

(3p) b) Determină punctele situate pe graficul funcției f la distanța $3\sqrt{2}$ u față de punctul $T(5; 4)$.



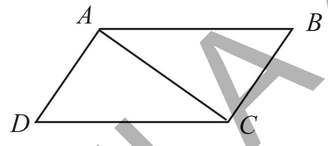
EDITURA PARALELA 45

3. Se dă expresia $E(x)=\left(\frac{x+5}{2x-2}+\frac{3-x}{x^2-2x+1}\right)^4:\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^6$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$.

(3p) a) Arată că $E(x)=\frac{1}{16}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$.

(2p) b) Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{E(x)}=1$.

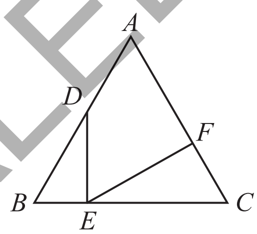
4. În figura alăturată este reprezentat paralelogramul $ABCD$. Se știe că $AB = 2BC$ și $\sphericalangle DAB = 2\sphericalangle ABC$.



(2p) a) Determină măsurile unghiurilor paralelogramului $ABCD$.

(3p) b) Determină raportul $\frac{\sphericalangle BAC}{\sphericalangle DAC}$.

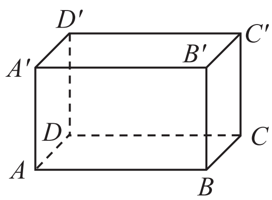
5. În figura alăturată, triunghiul echilateral ABC reprezintă schematic un panou solar, iar segmentele DE și EF reprezintă două bare metalice care oferă rezistență panoului. Se știe că $\mathscr{P}_{ABC}$ = = 24 m, DB = 4 m, EC = 6 m și că $\Delta DBE\sim\Delta ECF$.



(2p) a) Calculează aria triunghiului ADF.

(3p) b) Determină măsura unghiului DEF.

6. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ din figura alăturată reprezintă schematic o cărămidă. Paralelipipedul dreptunghic are diagonala de $10\sqrt{2}$ cm, iar înălțimea, lățimea și lungimea sunt trei numere naturale consecutive de aceeași paritate.



(2p) a) Calculează aria unei astfel de cărămizi.

(3p) b) Află numărul minim de cărămizi care pot fi împachetate în formă de cub.

Testul 2

Subiectul I. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

(5p) 1. Scriind numărul natural 400 ca produs de puteri de numere prime, obținem:
a) $2^3\cdot 5^3$; b) $2^4\cdot 5^2$; c) $2^5\cdot 5^2$; d) $2^4\cdot 5^3$.

(5p) 2. Numărul natural $\overline{2x}$ este prim dacă cifra x aparține mulțimii:
a) {3, 6}; b) {6, 9}; c) {5, 7}; d) {3, 9}.

(5p) 3. În anul 2020 o persoană a împlinit vârsta de 27 ani. Persoana respectivă va împlini 65 de ani în anul:
a) 2058; b) 2045; c) 2065; d) 2047.

(5p) 4. Mulțimea soluțiilor ecuației $x^2 = 1,(7)$, $x\in\mathbb{R}$, este:
a) $\left\{-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right\}$; b) $\left\{-\frac{5}{4},\frac{5}{4}\right\}$; c) $\left\{-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\}$; d) $\left\{-\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right\}$.

EDITURA PARALELA 45

INDICAȚII ŞI RĂSPUNSURI

ALGEBRĂ

CAPITOLUL II – CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$

Lecția 1. Adunarea și scăderea fracțiilor algebrice

1. a) $\frac{6-2x}{5x^4}$; b) $\frac{3x+3}{7x^2}$; c) $\frac{4x-1}{2x^3}$; d) $\frac{8x-13}{4x^2}$. **2.** a) $8x$; b) $3x$; c) $2x$; d) $4x$. **3.** a) $\frac{10x+1}{4x}$; b) $\frac{4-16x}{9x}$; c) $-\frac{2x+25}{12x^2}$; d) $\frac{x+29}{15x^2}$. **4.** a) $\frac{14x-7}{8x}$; b) $\frac{5x-5}{9x}$; c) $\frac{7x+13}{18x^2}$; d) $\frac{17}{24x^2}$. **5.** a) $\frac{3-5x}{3x^2}$; b) $\frac{3x^2+2}{4x^4}$; c) $\frac{2x^2-15}{6x^5}$. **6.** a) $\frac{5-8x^2}{6x^3}$; b) $\frac{5x-14}{10x^3}$; c) $\frac{21x^3+10}{12x^5}$. **7.** a) $\frac{5x-9}{2x^2-6x}$; b) $\frac{4x-1}{3x^2+3x}$; c) $\frac{x-4}{4x^2-8x}$. **8.** a) $\frac{2x+1}{8x^3+4x^2}$; b) $\frac{5x-1}{24x^3+8x^2}$; c) $\frac{3x-5}{18x^3-6x^2}$. **9.** a) $\frac{5}{x^3}$; b) $\frac{7}{x^3}$. **10.** a) $\frac{12-x}{3x^2-6x}$; b) $\frac{3x+8}{12x^2-12x}$; c) $\frac{14-5x^2}{4x^3+2x^2}$. **11.** a) $\frac{7x^2+10}{18x^2-12x}$; b) $\frac{3x^2-4}{24x^2-12x}$. **12.** a) $\frac{9}{x^3-6x^2+9x}$; b) $\frac{4}{x^3+4x^2+4x}$; c) $\frac{1}{9x^3+6x^2+x}$; d) $\frac{1}{4x^3+4x^2+x}$. **13.** a) $\frac{x-2}{x+2}$; b) $\frac{x+3}{x-3}$; c) $\frac{x}{x-5}$; d) $\frac{2x-1}{2x+1}$. **14.** a) $\frac{1}{x^2-3x}$; b) $\frac{4x+4}{x(x^2-4)}$. **15.** a) $E(x) = -\frac{x^3+15x+3}{4x^4-x^2}$; b) $E(x) = \frac{x^3+9x+10}{9x^5-4x^3}$. **16.** a) $E(x) = \frac{2x^3+61x-3}{(x+3)(x-3)^2}$; b) $E(x) = \frac{-4x^3-43x+2}{(x-2)(x+2)^2}$. **17.** b) $E(x)^{-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x^2+4} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 4 \Leftrightarrow |x| \geq 2$ și ținând seama de domeniul de definiție al expresiei $E(x)$, obținem $x \in (-\infty, -2) \cup (2; +\infty)$. **18.** b) $E(x) = \frac{2}{|x^2-1|}$, $n = \frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{2\cdot 4}+\frac{2}{3\cdot 5}+...+\frac{2}{10\cdot 12} = \frac{175}{132} = 1{,}32(57)$; $n = 1{,}3258$. **19.** $E(x) = 1$. **20.** După efectuarea calculelor, condiția dată se scrie $\frac{1}{x+y} = \frac{2}{xy}$, de unde obținem $x = \frac{2y}{y-2}$ și, analizând, pentru $y = 3$ rezultă $x = 6$, iar pentru $y = 6$ rezultă $x = 3$, prin urmare $\overline{xy} \in \{36, 63\}$.

Ce notă merit? Test de evaluare stadială

1. a) x; b) $\frac{x-1}{2x^2-6x}$. **2.** $\frac{4x}{4x^2-1}$. **3.** $E(x) = \frac{x+1}{x^2-2x+1}$.

Lecția 2. Înmulțirea fracțiilor algebrice

1. a) $\frac{16y^6}{25x^8}$; b) $\frac{21x^5}{8y^5}$; c) $\frac{10y^3}{21x^5}$; d) $\frac{20x^3}{27y^4}$. **2.** a) $\frac{x^2+x}{3y^2-3y}$; b) $\frac{2y^2-4y}{x^4-3x^3}$; c) $\frac{x^2+3x}{5y^2-20y}$;

EDITURA PARALELA 45

GEOMETRIE

CAPITOLUL I – ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

Lecția 1. Proiecții de puncte, de segmente și de drepte

1. B. $EF \perp \theta$. **2.** a) Proiecția punctului A pe planul α este punctul B; b) Analog; c) Analog. **3.** A. $MN \not\perp \beta$. **4.** a) Proiecția segmentului AB pe planul α este segmentul PQ; b) Analog; c) Analog. **5.** a) A; b) F; c) A. **6.** a) $\text{pr}_{(ABC)}\, A' = A$; b) $\text{pr}_{(ABC)}\, C' = C$; c) $\text{pr}_{(A'B'C')}\, B = B'$. **7.** a) $\text{pr}_{(A'AD)}\, B = A$; b) $\text{pr}_{(C'CD)}\, A = D$; c) $\text{pr}_{(A'AB)}\, C' = B'$; d) $\text{pr}_{(B'BC)}\, D' = C'$. **8.** a) F; b) A; c) A; d) A. **9.** a) A; b) A; c) A; d) A. **10.** a) $\text{pr}_{(A'B'C')}\, BC' = B'C'$; b) $\text{pr}_{(ABC)}\, D'B = DB$; c) $\text{pr}_{(A'AD)}\, A'C = A'D$; d) $\text{pr}_{(B'BC)}\, B'D = B'C$. **11.** a) $D'O'$; b) AO; c) $B'O$; d) AO'. **12.** a) $\{O\} = AC \cap BD$; $DO = 4$ cm; b) $VO = 3$ cm. **13.** a) $E'G' = 2\sqrt{10}$ cm; b) $D'E = 4\sqrt{6}$ cm; c) $EF' = 6\sqrt{2}$ cm. **14.** a) $BO = 2\sqrt{3}$ cm, $O = \text{pr}_{(ABC)}\, A$; b) $AM = 3\sqrt{3}$ cm. **15.** a) $AD' = 12$ cm; b) $AC \cap BD = \{O\}$. $B'O = 6\sqrt{3}$ cm. **16.** a) Construim $MN \perp A'C'$, $N \in A'C'$, deci $\text{pr}_{(A'AC)}\, AM = AN$; $AN = 6$ cm; b) $AC \cap BD = \{O\}$. Construim $MP \perp B'D'$, $P \in B'D'$, așadar $\text{pr}_{(B'BD)}\, CM = OP$; $OP = 6$ cm. **17.** $AC \cap BD = \{O\}$ și $A'C' \cap B'D' = \{O'\}$; $\text{pr}_{(B'BD)} A'C = OO'$; $m^2 = (R - r)^2 + i^2$, de unde obținem $i = O'O = 5$ cm. **18.** Notăm cu M mijlocul muchiei EF și construim $DN \perp D'M$, $N \in D'M$; $EF \perp (D'DM)$, deci $EF \perp D'N$, prin urmare $DN \perp (ED'F)$; $MN = 2$ cm și $D'M = 4$ cm, așadar $D'N = 2NM$, de unde rezultă că punctul N este centru de greutate în $\Delta ED'F$. **19.** $\Delta OAA' \equiv \Delta OAB$, deci $h = l$ și notăm $h = l = 2a$; $A'O \cap BC = \{M\}$, $A'M = a\sqrt{7}$ cm și $\mathcal{A}_{BA'C} = 7\sqrt{7}$ cm^2, deci $a^2\sqrt{7} = 7\sqrt{7}$ cm^2, de unde obținem $a = \sqrt{7}$ cm. Aplicând teorema lui Pitagora în ΔOMB, rezultă că $R^2 = 7 + (7 - R)^2$, de unde obținem $R = 4$ cm. **20.** Construim $OH \perp (ABC)$, $H \in (ABC)$; $AO \perp (BOC)$, deci $AO \perp BC$ și $OH \perp BC$, așadar $BC \perp (OAH)$, prin urmare $BC \perp AH$ și analog se arată că $AB \perp CH$, deci punctul H este ortocentrul triunghiului ABC. **21.** Notăm cu G centrul de greutate al $\Delta A'BC'$ și cu a lungimea muchiei $B'B$, iar $A'C' \cap B'D' = \{O\}$. Cum $A'O \equiv C'O$, rezultă că $G \in BO$. Observăm că $A'C' \perp (B'BG)$, deci $A'C' \perp B'D'$, prin urmare $A'B'C'D'$ este pătrat. Deoarece $\sphericalangle BB'O = 90°$, avem $\dfrac{B'O^2}{a^2} = \dfrac{1}{2}$, de unde rezultă că $B'O = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, deci $B'D' = a\sqrt{2}$ și $A'B' = a$. Prin urmare $ABCDA'B'C'D'$ este cub. **22.** „$\Rightarrow$” Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ și notăm cu O centrul bazei $ABCD$ și cu O_1 centrul feței laterale VBC. Deoarece $l = m$, rezultă că $AC^2 = VA^2 + VC^2$, deci $\sphericalangle AVC = 90°$, prin urmare $OV = OB = OC = \dfrac{AC}{2}$, așadar $OVBC$ este piramidă regulată, deci $\text{pr}_{(VBC)}\, O = O_1$. „$\Leftarrow$” Deoarece $\text{pr}_{(VBC)}\, O = O_1$, rezultă că $\Delta OO_1B \equiv \Delta OO_1V \equiv \Delta OO_1C$, deci $BO \equiv VO \equiv CO$, prin urmare $\Delta BOC \equiv \Delta VOC$, de unde rezultă că $BC \equiv VC$, așadar $l = m$.

Ce notă merit? Test de evaluare stadială

1. a) $P'Q'$; b) $N'P$; c) $Q'O$, unde $\{O\} = MP \cap NQ$. **2.** $AC \cap BD = \{O\}$. Deoarece $BD \perp (A'AC)$, rezultă că $\text{pr}_{(A'AC)} BC' = OC'$; $OC' = 3\sqrt{2}$ cm. **3.** Observăm că $\Delta DOE \equiv \Delta DOD'$, deci $DE \equiv DD'$, prin urmare $DEE'D'$ este pătrat, așadar $\sphericalangle(D'E, F'F) = 45°$.

EDITURA PARALELA 45

Modele de teste pentru Evaluarea Națională

Testul 1

Subiectul I

1. b) (*5p*). **2.** c) (*5p*). **3.** a) (*5p*). **4.** c) (*5p*). **5.** b) (*5p*). **6.** a) (*5p*).

Subiectul al II-lea

1. d) (*5p*). **2.** b) (*5p*). **3.** a) (*5p*). **4.** d) (*5p*). **5.** c) (*5p*). **6.** b) (*5p*).

Subiectul al III-lea

1. a) $x - 3 = 7(y - 3)$, $x + 1 = 4(y + 1)$; $x = 7$ ani și $y = 31$ ani (*3p*); b) $3(7 + a) = 31 + a$, de unde obținem $a = 5$ ani (*2p*). **2.** a) $A(1;\ 0)$, $B(0;\ -1)$; $\sphericalangle O = 90°$, $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 45°$ (*2p*); b) $\sqrt{(x-5)^2+(f(x)-4)^2} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow (x - 5)^2 = 9$, de unde rezultă că $x \in \{2, 8\}$, deci punctele sunt $M_1(2;\ 1)$ și $M_2(8;\ 7)$ (*3p*). **3.** a) $E(x) = \left[{}^{x-1)}\frac{x+5}{2(x-1)} + {}^{2)}\frac{3-x}{(x-1)^2}\right]^4 : \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^6 = \left[\frac{x^2+2x+1}{2(x-1)^2}\right]^4 :$

$: \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^6 = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}\right]^4 : \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^6 = \frac{1}{16}\cdot\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^8 : \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^6 = \frac{1}{16}\cdot\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$ (*3p*);

b) $\sqrt{E(x)} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{x+1}{x-1}\right| = 4 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = 4$ sau $\frac{x+1}{x-1} = -4 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{3}{5}, \frac{5}{3}\right\}$ (*2p*).

4. a) $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180° \Rightarrow 3\sphericalangle B = 180° \Rightarrow \sphericalangle B = 60° = \sphericalangle D$ și $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 120°$ (*2p*); b) $AM = BM$, deci ΔBCM este echilateral, prin urmare $AB = 2CM$, deci $\sphericalangle ACB = 90°$ și $\sphericalangle BAC = 30°$, așadar $\frac{\sphericalangle BAC}{\sphericalangle DAC} = \frac{1}{3}$ (*3p*). **5.** a) $\Delta DBE \sim \Delta ECF \Rightarrow \frac{DB}{EC} = \frac{BE}{CF} \Rightarrow CF = 3$ m $\Rightarrow AF = 5$ m; $\mathcal{A}_{ADF} = 5\sqrt{3}$ m^2 (*2p*); b) $\Delta DBE \sim \Delta ECF \Rightarrow \sphericalangle BDE \equiv \sphericalangle FEC$; $\sphericalangle BDE + \sphericalangle BED = 120°$, deci $\sphericalangle FEC + \sphericalangle BED = 120°$, prin urmare $\sphericalangle DEF = 60°$ (*3p*). **6.** a) $h^2 + (h + 2)^2 + (h + 4)^2 = 200$, de unde obținem $h = 6$ cm, $l = 8$ cm și $L = 10$ cm; $\mathcal{A} = 376$ cm^2 (*2p*); b) Notăm cu x, muchia cubului; $x = [6;\ 8;\ 10] = 120$ cm; $\mathcal{V}_c = 1728000$ cm^3; $\mathcal{V}_p = 480$ cm^3; $\mathcal{V}_c : \mathcal{V}_p = 3600$ cărămizi (*3p*).

Testul 2

Subiectul I

1. b) (*5p*). **2.** d) (*5p*). **3.** a) (*5p*). **4.** d) (*5p*). **5.** c) (*5p*). **6.** b) (*5p*).

Subiectul al II-lea

1. a) (*5p*). **2.** c) (*5p*). **3.** d) (*5p*). **4.** c) (*5p*). **5.** b) (*5p*). **6.** c) (*5p*).

Subiectul al III-lea

1. a) Rezolvând sistemul de ecuații $\frac{3}{5}f + \frac{1}{2}b = 15$ și $\frac{4}{5}f + \frac{3}{4}b = 21$, obținem $f = 15$ și $b = 12$, deci în clasă sunt 27 de elevi (*3p*); b) $b = \frac{p}{100}f$, de unde rezultă că $p = 80$ (*2p*). **2.** a) $S = \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x+2)^2} = |x - 1| + |x + 2|$ (*2p*); b) $-3 \le x - 1 \le 0$, deci $|x - 1| = 1 - x$; $0 \le x + 2 \le 3$, deci $|x + 2| = x + 2$; $S = 1 - x + x + 2 = 3$ (*3p*). **3.** a) $5 = -m + 4 \Leftrightarrow -m = 1 \Leftrightarrow m = -1$ (*2p*); b) $A(4;\ 0)$ și $B(0, 4)$; Construim $CD \perp OA$, $D \in OA$, $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DO}$, deci $\frac{AO}{DO} = \frac{8}{5}$ și obținem $DO = \frac{5}{2}$; $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}$, așadar $C\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ (*3p*). **4.** a) $\mathcal{A}_{AECD} = \frac{(AE+DC)\cdot AD}{2} = 10$ km^2 (*2p*); b) $CE = 5$ km; $\Delta DTC \sim \Delta CBE$, de unde obținem $DT = 3{,}2$ km (*3p*). **5.** a) $AC \cap BD = \{O\}$; $BO = \sqrt{OF \cdot OC} = 12$ m, deci $BD = 24$ m; $\mathcal{A}_{ABCD} = 384$ m^2 (*3p*); b) $AB^2 = AO^2 + BO^2$, de unde

EDITURA PARALELA 45

Cuprins

EDITURA PARALELA 45

EDITURA PARALELA 45